問1

(1) 与式 $= (x^2+2x)y^2 + (-2x^2-6x+2)y + 6x - 3$

$= x(x+2)y^2 + (-2x^2-6x+2)y + 3(2x-1)$

$= \{xy-(2x-1)\}\{(x+2)y-3\}$

$= (xy-2x+1)(xy+2y-3)$ //

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{143} a_k = \sqrt{144} - \sqrt{1} = 11$ //

(3) 両辺の2を底とする対数をとると

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 \dfrac{x^5}{64}$

$(\log_2 x)^2 = 5\log_2 x - 6$

$(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 3) = 0$

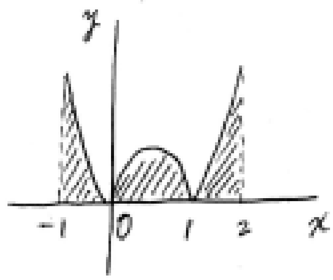
$\log_2 x = 2, 3$

$\therefore x = 4, 8$ //

(4) 与式は右図の斜線部分の面積に等しいから

与式 $= 2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} |x^2 - x|\,dx$

$= 2\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (-x^2+x)\,dx + 2\int_{1}^{2} (x^2-x)\,dx$



$= 2\left[-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + 2\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$

$= \dfrac{11}{6}$ //

(5) この試行は2項分布にしたがう。4以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{3}$ だから、期待値は

$4 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$ //

(6) 半角の公式を用いると

$$与式 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos 260^\circ)$$

ここで

$$\cos 20^\circ + \cos 260^\circ = 2\cos 140^\circ \cos 120^\circ = -\cos 140^\circ$$

したがって

$$与式 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{3}{2}$$ //

問2

(1) $B(x, y)$ (ただし, $x<0$, $y>0$) とおく。

$OB^2=20$ より $x^2+y^2=20$

$AB^2=25$ より $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

これを解いて

$$x=-\frac{4}{5},\ y=\frac{22}{5}$$ //

(2) $\triangle OAB=\frac{1}{2}\left|4\cdot\frac{22}{5}-3\left(-\frac{4}{5}\right)\right|=10$ //

$OA=5$ だから, 内接円の半径は

$$\frac{2\cdot 10}{2\sqrt{5}+5+5}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$ //

(3) $\triangle OAB$ は $AB=AO$ の二等辺三角形だから, OB の中点を M とすると, 内心は AM 上にあり, AM を $OA:OM$ に内分する。

$$M\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

$$OA:OM=5:\sqrt{5}$$

であるから, 内心は

$$\left(\frac{-15+11\sqrt{5}}{10}, \frac{10+\sqrt{5}}{5}\right)$$ //

問3

(1) z_k $(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ は方程式 $z^n-1=0$ の異なる

n 個の解だから

$$z^n-1=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\cdots\cdots(z-z_{n-1})$$

右辺を展開すると

$$z^n-(z_0+z_1+z_2+\cdots\cdots+z_{n-1})z^{n-1}+\cdots\cdots$$

であるから，左辺と比較して

$$z_{n-1}+z_{n-2}+\cdots\cdots+z_2+z_1+z_0=0 \,/\!/$$

(2) 余弦定理より

$$d(w,z_k)^2=r^2+1-2r\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}d(w,z_k)^2=n(r^2+1)-2r\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)$ は $z_{n-1}+z_{n-2}+\cdots\cdots+z_2+z_1+z_0$ の実部

だから，(1) より 0 である。したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}d(w,z_k)^2=n(r^2+1) \,/\!/$$

(3) $w=\pm1\pm i$ のとき r は最大値 $\sqrt{2}$ をとり，$w=0$ のとき r は

最小値 0 をとる。したがって $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}d(w,z_k)^2$ は

最大値 $n((\sqrt{2})^2+1)=3n \,/\!/$

最小値 $n(0^2+1)=n \,/\!/$

人料ク

問4

(1) $f(x)=x^3e^{-x}\ (x>0)$

$f'(x)=(3-x)x^2e^{-x}$

したがって，増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって

極大値 $f(3)=\dfrac{27}{e^3}$ //

(2) $x>0$ のとき，明らかに　$0<x^2e^{-x}$ //

また，(1)より

$x^3e^{-x}\leqq\dfrac{27}{e^3}$

ここで $\dfrac{27}{e^3}<\dfrac{27}{2^3}<4$ であるから

$x^3e^{-x}<4$

両辺を $x\,(>0)$ で割って　$x^2e^{-x}<\dfrac{4}{x}$ //

(3) $\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$ （Cは積分定数）

したがって

$I(M)=-M^2e^{-M}-2Me^{-M}-2e^{-M}+2$

ここで，(2)より

$0\leqq\lim_{M\to\infty}M^2e^{-M}\leqq\lim_{M\to\infty}\dfrac{4}{M}=0$

はさみうちの原理より

$\lim_{M\to\infty}M^2e^{-M}=0$

また

$\lim_{M\to\infty}Me^{-M}=\lim_{M\to\infty}\dfrac{M^2e^{-M}}{M}=0$，$\lim_{M\to\infty}e^{-M}=0$

であるから

$\lim_{M\to\infty}I(M)=2$ //