Ⅰ (1) $f(x)$ が実数解をもつと仮定する。

解の絶対値が 1 だから，実数解は

$$x=1 \quad \text{または} \quad x=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

一方，$a>0$，$b>0$ だから

$$\begin{cases} f(1)=a+b+4 \neq 0 \\ f(-1)=a+b \neq 0 \end{cases}$$

これは①が $f(x)=0$ の解であることに反する。

したがって，$f(x)=0$ は実数解をもたない。

(2) $f(x)=0$ は実数係数の方程式だから，4つの解は

$$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$$

とおける。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\overline{\alpha}+\beta+\overline{\beta}=-a & \cdots\cdots ② \\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\beta+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\alpha}\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=a+b & \cdots\cdots ③ \\ \alpha\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\alpha}\overline{\beta}+\alpha\beta\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=a-2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$ だから，③，④は

$$\begin{cases} 1+\alpha\beta+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\alpha}\overline{\beta}+1=a+b & \cdots\cdots ③' \\ \beta+\overline{\beta}+\alpha+\overline{\alpha}=a-2 & \cdots\cdots ④' \end{cases}$$

④′－②より　$2a-2=0$　$\therefore\ \underline{a=1}$

③′に代入して

$$1+\alpha(\beta+\overline{\beta})+\overline{\alpha}(\beta+\overline{\beta})+1=1+b$$

$$(\alpha+\overline{\alpha})(\beta+\overline{\beta})=b-1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$A=\alpha+\overline{\alpha}$，$B=\beta+\overline{\beta}$ とおくと，②，⑤より

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ AB=b-1 \end{cases}$$

したがって，A，Bを2解とする方程式は

$$t^2+t+b-1=0$$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5-4b}}{2}$$

2解A，Bは実数だから

$$5-4b\geqq 0$$

bは正の整数だから　$\underline{b=1}$

(3)　(2)より　$t^2+t=0$

$\therefore\ t=0,\ -1$

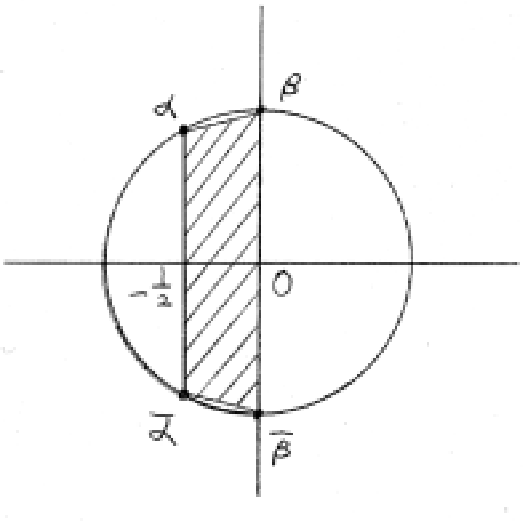
したがって，$A<B$とすると，$A=-1$，$B=0$であり

$$\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=\frac{A}{2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{\beta+\bar{\beta}}{2}=\frac{B}{2}=0$$

よって，四角形は右図のようになり，

面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2)\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$



II (1) $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$

したがって, $a_4 - a_2 = \underline{2}$, $a_5 - a_3 = \underline{4}$

(2) n が偶数のとき

$a_n = 4(a_{n-2} - 1) + 3 = 4a_{n-2} - 1$

n が奇数のとき

$a_n = 4a_{n-2} + 1$

したがって, $n = 2m$ とおくと

$$a_{2m} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^{m-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2^{2m-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$n = 2m+1$ とおくと

$$a_{2m+1} = \frac{1}{3} \cdot 4^m - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2^{2m} - \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

① より

$$\begin{aligned} a_{2m} - a_{2m-2} &= \frac{1}{3}(2^{2m-1} - 2^{2m-3}) \\ &= 2^{2m-3} \\ &= 2^{n-3} \quad (n = 2m \text{ より}) \end{aligned}$$

② より

$$\begin{aligned} a_{2m+1} - a_{2m-1} &= \frac{1}{3}(2^{2m} - 2^{2m-2}) \\ &= 2^{2m-2} \\ &= 2^{n-3} \quad (n = 2m+1 \text{ より}) \end{aligned}$$

以上より

$$a_n - a_{n-2} = \underline{2^{n-3}}$$

(3) ① より

$$a_{2m} = \underline{\frac{2^{2m-1} + 1}{3}}$$

Ⅲ (1) $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$

$$\overrightarrow{PQ} = \theta\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \theta(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

したがって,

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases}$$

(2) $$\int_1^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \theta\cos\theta)\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^1 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \theta\sin\theta)\,\theta\sin\theta\,d\theta$$

(3) $$\begin{cases} S = \int_0^1 x\,dy \\ S = \frac{\pi}{2} - \int_1^{\frac{\pi}{2}} y\,dx \end{cases}$$

辺々加えて

$$2S = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\cos\theta + \theta\sin\theta)\theta\sin\theta - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\theta\cos\theta\}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ S = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$$

IV

(1) $\frac{b}{8} = \frac{1}{6} - \left\{ \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \times \frac{1}{8} - \frac{c}{8} \right\}$

$\therefore \quad \frac{b}{8} - \frac{c}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

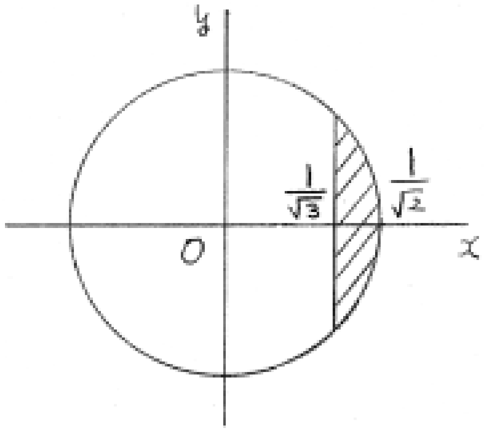
$\pi \fallingdotseq 3.14$, $2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.82$ より

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} > 1$$

したがって、 $\frac{b}{8} - \frac{c}{8} < 0$

$\therefore \quad \underline{b < c}$

(2) $\frac{c}{8} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi y^2 \, dx$



$= \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) dx$

$= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \pi \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{7}{18\sqrt{3}} \right)$

$\therefore \quad \frac{a}{8} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{c}{8}$

$= \left(\frac{1}{12\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{7}{18\sqrt{3}} \right) \pi$

$= \left(\frac{7}{18\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \pi$

したがって

$$\frac{a}{8}-\frac{c}{8}=\left\{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\times\frac{1}{8}-\frac{c}{8}\right\}-\frac{c}{8}$$

$$=\frac{\pi}{12\sqrt{2}}-\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{9\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{28\sqrt{2}-21\sqrt{3}}{36\sqrt{6}}\pi$$

$28\sqrt{2}\fallingdotseq 39.2$ ， $21\sqrt{3}\fallingdotseq 35.7$ より

$$\frac{a}{8}-\frac{c}{8}>0$$

$\therefore\ c<a$

以上より

$$\underline{b<c<a}$$

V (1)

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+x^2}$$

したがって

$$\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)$$

$$= \underline{1}$$

(2) $$f''(s) = \frac{d}{dx}f'(s)\frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ここで

$$g'(s) = \frac{d}{dx}g(s)\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

したがって

$$\underline{f''(s) = -\frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\,g'(s)}$$

$$g''(s) = \frac{d}{dx}g'(s)\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)f'(s)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \cdot f'(s)$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} f'(s)$$

$$= \frac{1}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} f'(s)$$

(3) 接線の方向ベクトルは $(f'(s), g'(s))$ だから

下向きの法線の方向ベクトルは

$$(g'(s), -f'(s))$$

(1) より，このベクトルの大きさは 1 だから

$$v = f(s) + a g'(s)$$

$$w = g(s) - a f'(s)$$

(4) $$M - L = \int_0^1 \left\{ \sqrt{\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dw}{ds}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \right\}^2 \frac{ds}{dx} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sqrt{(f'(s) + a g''(s))^2 + (g'(s) - a f''(s))^2} - 1 \right\}^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{a}{(1+\{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{a}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} a$$