数　　　学

問　題

2004年度　早稲田大学理工学部

注　意　事　項

1. この試験では，この問題冊子のほかに，解答用紙３種類（その１，その２，その３）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙には，試験開始の合図があるまで手をふれないでください。
3. 問題は４～５ページに記載されています。
4. すべての解答用紙の所定欄（各２か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（ＨＢ）またはシャープペンシル（ＨＢ）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出してください。

I． 以下の問に答えよ。

(1) 実数 a に対して $f(x)=ax+2$ とする。$f(f(f(x)))$ が $f(x)$ の逆関数になるような a を求めよ。

(2) 長さ $3\sqrt{2}$ の線分PQが座標平面上にあり，点Pは直線 $y=x$ 上を，点Qは直線 $y=-x$ 上を動くとする。このとき，線分PQを $2:1$ に内分する点Rの x 座標の最大値を求めよ。

II． E を2次の単位行列とし，また，O を2次の零行列とする。以下の問に答えよ。

(1) 2次正方行列 J が $J^2=-E$ を満たしているとき，$xE+yJ=O$ となる実数 x, y は $x=y=0$ のみであることを示せ。

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ のとき

$$A=aE+bJ, \qquad J^2=-E$$

を同時に満たす実数 a, b および2次正方行列 J を求めよ。

III． 2つのサイコロを同時に投げる試行 T を行うとする。この試行 T においてサイコロの出た目の差の絶対値が1以下である事象を A で表す。以下の問に答えよ。

(1) A が起こる確率を求めよ。

(2) 試行 T をくり返して m 回目に初めて A が起こる確率を求めよ。

(3) n を正の整数とする。試行 T をくり返し，$2n$ 回以下の偶数回目で初めて A が起こる確率 p_n を求めよ。また p_n が $\dfrac{2}{7}$ より大きくなる最小の n を求めよ。

IV. 初項が $a_1 = \sqrt{2}$ で，漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について以下の問に答えよ。

(1) $\log(a_1 - 1) + \log(a_2 - 1) + \log(a_3 - 1) + \log(a_3 + 1)$ の値を求めよ。

(2) すべての正の整数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < 2 - a_n < \frac{1}{2^{n-1}}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n - 1)$ を求めよ。

V. a, b は実数で $b > 0$ とし，2つの曲線 $C_1 : y = e^x$，$C_2 : y = b\,e^{ax}\cos x$ を考える。以下の問に答えよ。

(1) $a = b = 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において C_1, C_2 によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(2) $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ として $a = 1 + \tan\theta$ とおく。$0 < x < \pi$ において C_1, C_2 が交点を持たないような正の実数 b の範囲を θ を用いて表せ。

[以　下　余　白]