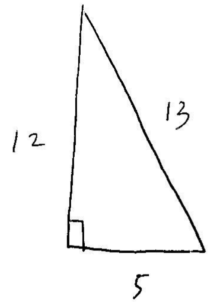
早稲田大学　教育学部　数学　解答例

1 (1) 右図より，内接円の半径 r は



$$\frac{1}{2}(5+12+13)r=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12$$

$$\therefore\ r=2$$

(2) $2\cos^{16}x+19\sin^{16}x$

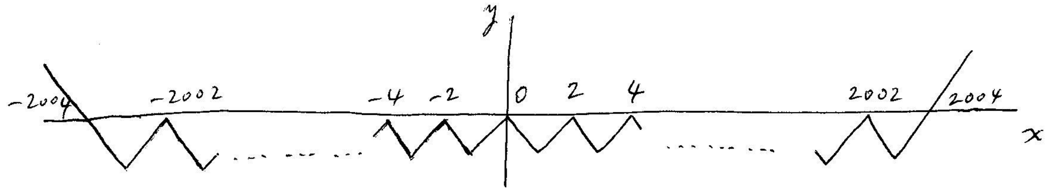
$$\leqq 2\cos^2 x+19\sin^2 x = 2+17\sin^2 x$$

$2+17\sin^2 x$ は $\sin x=\pm 1\ (\cos x=0)$ のとき最大値 19 をとる。

このとき，上の不等式で等号が成り立つから

$2\cos^{16}x+19\sin^{16}x$ の最大値は 19

(3) $y=f_{2004}(x)$ のグラフは



$f_{2004}(x)=0$ の解の個数は

$$\frac{2004}{2}\times 2+1=2005$$

(4) x_n のうちで，$-1, 0, 1, 2$ の個数をそれぞれ a, b, c, d とおくと

$$\begin{cases} -a+c+2d=19 & \cdots① \\ a+c+4d=99 & \cdots② \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2000} x_n^3 &= -a+c+8d \\ &= (19-2d)+8d \quad (①より) \\ &= 19+6d \quad \cdots③\end{aligned}$$

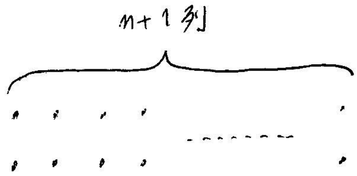
① + ② より

$$c+3d=59$$

c, d は自然数であり，$3\times 19=57$，$3\times 20=60$ だから，d の最大値は 19 である。したがって，③の最大値は

$$19+6\times 19=133$$

$\boxed{2}$



$y=1$ 上から1点, $y=0$ 上から2点選んでできる三角形のうち面積が $\frac{k}{2}$ であるものは

$(n+1)(n+1-k)$ 個 $(k=1, 2, \cdots, n)$

$y=0$ 上から1点, $y=1$ 上から2点選んでできる三角形も同様だから,

三角形の面積の総和は

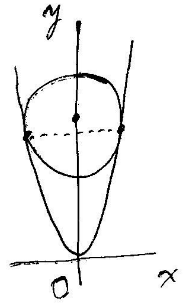
$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1)(n+1-k)\cdot\frac{k}{2}\right\} &= \sum_{k=1}^{n}(n+1)(n+1-k)k \\
&= (n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2 \\
&= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{6} \quad //
\end{aligned}
$$

3 $O_n : x^2 + (y - p_n)^2 = r_n^2$ ------ ①

とおく。

$$y = x^2 \quad \text{------ ②}$$

① と ② は接するから，① と ② から x を消去してできる 2 次方程式



$$y + (y - p_n)^2 = r_n^2$$

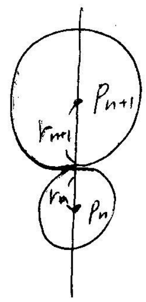
$$y^2 + (1 - 2p_n)y + p_n^2 - r_n^2 = 0$$

は重解をもつ。したがって

$$(1 - 2p_n)^2 - 4(p_n^2 - r_n^2) = 0$$

$$\therefore\ 4r_n^2 = 4p_n - 1 \quad \text{------ ③}$$

また，右図より



$$p_{n+1} - p_n = r_{n+1} + r_n \quad \text{------ ④}$$

③ より，$p_{n+1} - p_n = r_{n+1}^2 - r_n^2$ だから，上式は

$$(r_{n+1} + r_n)(r_{n+1} - r_n) = r_{n+1} + r_n$$

両辺を $r_{n+1} + r_n\ (\neq 0)$ で割って

$$r_{n+1} - r_n = 1$$

$r_1 = \frac{1}{2}$ より $\quad r_n = n - \frac{1}{2}$

したがって，円 O_n の直径は $\quad 2r_n = 2n - 1$ //

このとき，④ は

$$p_{n+1} - p_n = n + 1 - \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} = 2n$$

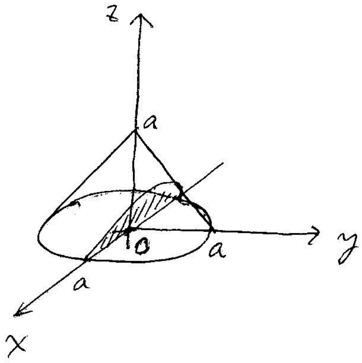
$$\therefore\ p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \quad (n \geqq 2)$$

$$= \frac{1}{2} + (n-1)n \quad (n = 1 \text{ のときも成り立つ})$$

$$= n^2 - n + \frac{1}{2}$$ //

$\boxed{4}$

(1) 右図のように座標をおく。



側面： $x^2+y^2=(a-z)^2$

平面P： $z=y$

の共有点は

$$\begin{cases} x^2+y^2=(a-y)^2 \cdots ① \\ z=y \end{cases}$$

①より $y=-\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$ $(-a\leqq x\leqq a)$

したがって，斜線部分の xy 平面への正射影の面積は

$$\int_{-a}^{a}\left(-\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6a}+\frac{a}{2}x\right]_{-a}^{a}=\frac{2}{3}a^2$$

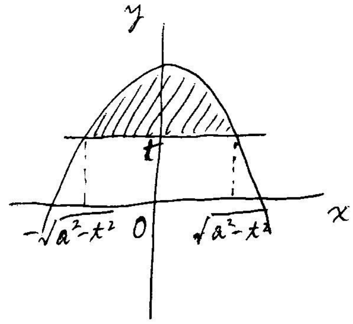
よって，切り口の面積は

$$\frac{2}{3}a^2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$$

(2) 平面Pと平行な切り口 $z=y-t$ $(0\leqq t\leqq a)$ による断面は

$$x^2+y^2=\{a-(y-t)\}^2$$

$$\therefore\ y=-\frac{x^2}{2(a+t)}+\frac{a+t}{2}$$



また，$y=t$ との交点は $(\pm\sqrt{a^2-t^2},\ t)$ だから，

右図の斜線部分の面積 S_t は

$$S_t=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}\left\{\left(-\frac{x^2}{2(a+t)}+\frac{a+t}{2}\right)-t\right\}dx$$

$$=\frac{2(a-t)\sqrt{a^2-t^2}}{3}$$

であり，断面積は $\sqrt{2}S_t$ である。

次に，平面Pと垂直な u 軸をとると

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}t\quad\left(0\leqq u\leqq\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって，求める体積は

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} S_t \, du = \int_0^a \frac{2\sqrt{2}(a-t)\sqrt{a^2-t^2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt$$

$$= \frac{2}{3}a \int_0^a \sqrt{a^2-t^2} \, dt - \frac{2}{3}\int_0^a t\sqrt{a^2-t^2} \, dt$$

$$= \frac{2}{3}a \times \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{-2}(a^2-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) a^3 \quad //$$