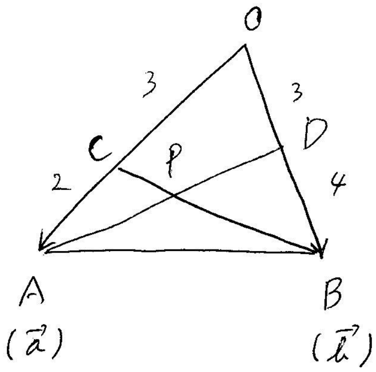
問1



$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OD}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\cdot\frac{3}{7}\vec{b}$$

ア: $\frac{3}{7}t$

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OB}$$

$$= (1-s)\cdot\frac{3}{5}\vec{a} + s\vec{b}$$

イ: $\frac{3}{5}(1-s)$

したがって

$$\begin{cases} 1-t = \frac{3}{5}(1-s) \\ \frac{3}{7}t = s \end{cases}$$

$\therefore\ t = \frac{7}{13},\ s = \frac{3}{13}$

ウ: $\frac{7}{13}$

エ: $\frac{3}{13}$

よって

$$\vec{OP} = \frac{6}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

オ: $\frac{6}{13}$

カ: $\frac{3}{13}$

$\triangle OPA : \triangle OAB = PC : BC = 3 : 13$ より

$$S_1 = \frac{3}{13}S$$

キ: $\frac{3}{13}$

$$\begin{cases} \triangle OPB : \triangle OAB = PD : AD = 6 : 13 \\ \triangle PDB : \triangle OPB = BD : OB = 4 : 7 \end{cases}$$ より

$$S_2 = \frac{4}{7}\triangle OPB = \frac{4}{7}\times\frac{6}{13}S = \frac{24}{91}S$$

$\therefore\ S_1 : S_2 = \frac{3}{13} : \frac{24}{91} = 7 : 8$

ク: $\frac{4}{7}$

ケ: $\frac{24}{91}$

コ: $7 : 8$

問2

(1) $|z^7| = 128$ だから

$|z|^7 = 2^7$ $\quad \therefore \ |z| = 2$

したがって，$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0° \leqq \theta < 360°)$ とおける。

$z^7 = 128$ より

$\cos 7\theta + i\sin 7\theta = 1$

$\therefore \ 7\theta = 360° \times n$ （nは整数）

$\therefore \ \theta = \dfrac{360° \times n}{7}$

ア：2

よって

$$z = 2\left(\cos\frac{360° \times n}{7} + i\sin\frac{360° \times n}{7}\right)$$

イ：7

ただし，$0° \leqq \dfrac{360° \times n}{7} < 360°$ より

$0 \leqq n \leqq 6$

ウ：6

(2) 左辺 $= (z - 2i)^3$ だから

$(z - 2i)^3 = 27$

$(z - 2i)^3 - 3^3 = 0$

$(z - 2i - 3)\{(z - 2i)^2 + (z - 2i) \cdot 3 + 9\} = 0$

$\therefore \ z - 2i = 3, \quad z - 2i = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

したがって

$z = 3 + 2i, \ -\dfrac{3}{2} + \dfrac{4 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ //

問3

(i) $n=3k+1$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$ のとき

$$n+2=3(k+1)$$

$n+2$ は3の倍数だから, $n+2$ が素数のとき

$$n+2=3$$

$$\therefore\ n=1$$

$n=1$ は素数でないから条件に反する。

(ii) $n=3k+2$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots)$ のとき

$$n+4=3(k+2)$$

$n+4$ は3の倍数だから, $n+4$ が素数のとき

$$n+4=3$$

$$\therefore\ n=-1$$

$n=-1$ は n が自然数であることに反する。

(iii) $n=3k$ $(k=1,2,3,\cdots\cdots)$ のとき

n は3の倍数だから, n が素数のとき

$$n=3$$

このとき, $n+2=5$, $n+4=7$ であり, n, $n+2$, $n+4$ はすべて素数である。

以上より, n, $n+2$, $n+4$ がすべて素数であるのは $n=3$ の場合だけである。

問4

(1) (A)をxについて整理して

$$3x^2-2(y+2)x+(2y^2+5y+2)=0$$

xは実数だから

$$\frac{D}{4}=(y+2)^2-3(2y^2+5y+2)\geqq 0$$

$$5y^2+11y+2\leqq 0$$

$$(5y+1)(y+2)\leqq 0$$

$$\therefore\ -2\leqq y\leqq -\frac{1}{5}\ //$$

(2) (1)より　$y=-2,\ -1$

$y=-2$のとき，(A)は

$$3x^2=0$$

$$\therefore\ x=0$$

$y=-1$のとき，(A)は

$$3x^2-2x-1=0$$

$$(3x+1)(x-1)=0$$

xは整数だから　$x=1$

以上より，整数解は

$$(x,y)=(0,-2),\ (1,-1)\ //$$

問5

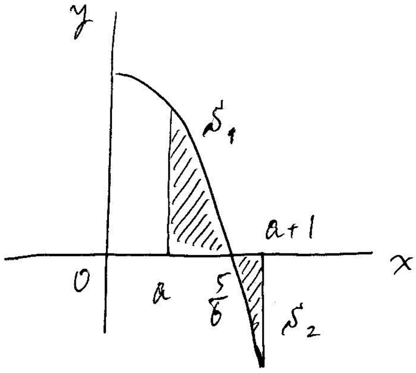
(1) $S = S_1 + S_2$

$= \int_a^{\frac{5}{6}} (25 - 36x^2)\,dx$

$\quad + \int_{\frac{5}{6}}^{a+1} \{-(25 - 36x^2)\}\,dx$

$= \left[25x - 12x^3\right]_a^{\frac{5}{6}} - \left[25x - 12x^3\right]_{\frac{5}{6}}^{a+1}$

$= 24a^3 + 36a^2 - 14a + \frac{133}{9}$ //



(2) $S' = 72a^2 + 72a - 14$

$= 2(36a^2 + 36a - 7)$

$= 2(6a+7)(6a-1)$

a	0	…	$\frac{1}{6}$	…	$\frac{1}{2}$
S'		−	0	+	
S		↘		↗	

$a = 0$ のとき $S = \frac{133}{9}$, $a = \frac{1}{2}$ のとき $S = \frac{178}{9}$ となる

最大値 $\frac{178}{9}$ $\left(a = \frac{1}{2}\text{ のとき}\right)$ //

$a = \frac{1}{6}$ のとき $S = \frac{122}{9}$ となる

最小値 $\frac{122}{9}$ $\left(a = \frac{1}{6}\text{ のとき}\right)$ //