1

(1) $\frac{2}{13} = 0.\dot{1}5384\dot{6}$

$2000 \div 6 = 333 \cdots 2$ だから，小数点以下第2000位は　5

(2) 2つのグラフはy軸に関して対称だから
$x>0$の範囲でちょうど1点を共有する
条件を求めればよい。$x>0$のとき，2つのグラフは

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 + a \end{cases}$$

$\therefore\ x^2 - x^3 = a \cdots\cdots ①$

$f(x) = -x^3 + x^2$ とおくと

$f'(x) = -3x^2 + 2x$

$= -x(3x-2)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘

したがって，①が$x>0$の範囲にちょうど1つの解をもつための条件は

$a = \frac{4}{27}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left|\alpha^k - \frac{i}{2}\right|^2 = \sum_{k=0}^{10} \left(\alpha^k - \frac{i}{2}\right)\left(\bar{\alpha}^k + \frac{i}{2}\right)$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{10} \left(|\alpha|^{2k} - \frac{i}{2}\bar{\alpha}^k + \frac{i}{2}\alpha^k + \frac{1}{4}\right) \cdots\cdots ①$

ここで，$\alpha^{11} = 1$ より

$(\alpha - 1)(\alpha^{10} + \alpha^9 + \cdots + \alpha + 1) = 0$

αは虚数だから

$\alpha^{10} + \alpha^9 + \cdots + \alpha + 1 = 0$

また，$|\alpha^{11}| = 1$ だから

$|\alpha| = 1$

したがって，①は

$1 \times 11 - 0 + 0 + \frac{1}{4} \times 11 = \frac{55}{4}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{19} a_k(1+x)^k = \sum_{k=0}^{19}(-x)^k$

$t = 1+x$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{19} a_k t^k = \sum_{k=0}^{19}(1-t)^k$$

$$\therefore\ a_2 = {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots\cdots + {}_{19}C_2$$

$$= \sum_{k=2}^{19}\frac{k(k-1)}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{18}\frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{18\cdot19\cdot37}{6} + \frac{18\cdot19}{2}\right) = 1140 /\!/$$

2

(1) C, M, E が2個ずつ, O, R が1個ずつの順列は

$$\frac{8!}{2!2!2!}=7!$$

したがって, 円順列は

$$\frac{7!}{8}=630\text{通り}$$

(2) C, M, E がそれぞれ隣り合う並べ方の集合を X, Y, Z とすると

$$n(X\cup Y\cup Z)=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(Y\cap Z)-n(Z\cap X)+n(X\cap Y\cap Z)$$

ここで

$$n(X)=n(Y)=n(Z)=\frac{6!}{2!2!}=180$$

$$n(X\cap Y)=n(Y\cap Z)=n(Z\cap X)=\frac{5!}{2!}=60$$

$$n(X\cap Y\cap Z)=4!=24$$

したがって, 求める並べ方は

$$630-(180\times3-60\times3+24)=246\text{通り}$$

$\boxed{3}$

(1) $10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$

$$4 < k\log_{10}2 < \log_{10}2 + 4$$

$$\frac{4}{\log_{10}2} < k < 1 + \frac{4}{\log_{10}2}$$

$$\frac{4}{\log_{10}2} = \frac{4}{0.301} = 13.289\cdots \text{ だから}$$

$$k = 14$$

(2) 最高位の数字が1であるものは

$$10^n \leqq 2^k < 2 \cdot 10^n \text{ ---- ①}$$

をみたす。ただし、$2^1 \sim 2^3$ の最高位は1でないから、2^k は2けた以上の数であり、$\log_{10}2^{2004} = 2004 \times 0.301 = 603.204$ より 2^{2004} は604けたの数であるから

$$1 \leqq n \leqq 603 \text{ ---- ②}$$

①より

$$n \leqq k\log_{10}2 < \log_{10}2 + n$$

$$\frac{n}{\log_{10}2} \leqq k < 1 + \frac{n}{\log_{10}2}$$

この区間の幅は1だから、この不等式をみたす自然数 k はただ1つ存在する。一方、n の値は②より603通りあるから、各れに対して k が1つずつ存在して、全部で

603個