早稲田大学　国際教養学部　数学　解答例

問1.　4人を P, Q, R, S とする。　全体のカードの出し方は $3^4=81$

(1)　1人だけ退出が P のとき

　　P　　QRS

カード　A → BBB, CCC

※　$\dfrac{[だれ]\times[どのように]}{全体} = \dfrac{{}_4C_1\times 3\times 2}{3^4} = \dfrac{8}{27}$　アイウ

(2)　2人だけ退出するときも ※ の組立てで

　　P, Q　　R, S

カード　A, B → CC

　　　B, A → CC

$\dfrac{{}_4C_2\times 3\times 2}{3^4} = \dfrac{36}{81}\left(=\dfrac{12}{27}\right)$

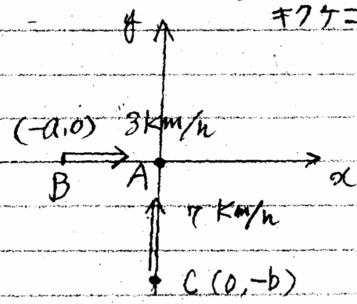
3人が退出するときはないので　求める確率は　$1-\left\{\dfrac{8}{27}+\dfrac{12}{27}\right\}=\dfrac{7}{27}$　エオカ

(3)　退出する人数と残っている人数の関係は

退出	1	2	0
残り	3	2	4

求める期待値 E は　$E = 4\times\dfrac{7}{27}+3\times\dfrac{8}{27}+2\times\dfrac{12}{27}=\dfrac{76}{27}$　キクケコ

問2.　(1)　A を $(0,0)$, $B(-a,0)$, $C(0,-b)$ とする　東に歩く人, 北に歩く人は それぞれ x軸, y軸上の移動と考えることができるので t時間後の位置は それぞれ



$(-a+3t,\ 0)$　$(0,\ -b+7t)$

と表される　2人のキョリを h とすると

$$h^2 = (3t-a)^2+(7t-b)^2$$
$$= 58t^2-2(3a+7b)t+a^2+b^2$$
$$= 58\left(t-\frac{3a+7b}{58}\right)^2+\frac{(7a-3b)^2}{58}$$

よって 2人が最も接近するのは　$t=\dfrac{3a+7b}{58}$　のとき　$\dfrac{|7a-3b|}{\sqrt{58}}$　サシスセ

(2)　$y=-|x|+1$ は y軸対称．より $(1,0)$ を通り

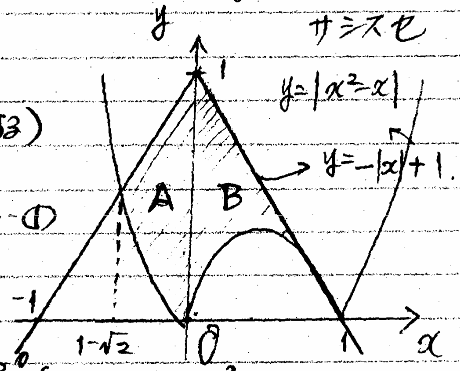
$|-x^2+x| = -|x|+1$,　$0\leqq x\leqq 1$

のとき　$-x^2+x=-x+1$

$0=x^2-2x+1$　　$x=1$（接する）

また　$x<0$ のとき　$x^2-x=x+1$

$0=x^2-2x-1$　　$x=1-\sqrt{2}$　…①



求める面積 S は 右図の A, B の面積の和で B は 1辺の長さ1の直角二等辺三角形から 放物線と x軸で囲む部分を除いたもの

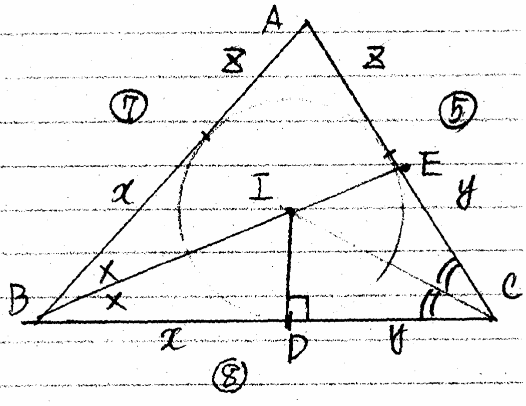
また A は ①より $\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{0} -(x^2-2x-1)\,dx = -\int_{1-\sqrt{2}}^{0}\left\{(x-1)^2-2\right\}dx$

$$= -\left[\frac{1}{3}(x-1)^3-2(x-1)\right]_{1-\sqrt{2}}^{0}$$

$= \frac{1}{3}\left\{(-\sqrt{2})^3 - (-1)^3\right\} + 2\left\{-1-(-\sqrt{2})\right\} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}$

よって $S = A+B = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{3}\right) = \underline{\frac{-4+4\sqrt{2}}{3}}$ ソタチ

問3. $AB=7,\ BC=8,\ CA=5$



(1) 余弦定理により

$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\times BC} = \frac{11}{14}$

$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2 B} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$ ツテトナ

(2) $S = \frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\angle ABC$

$= \underline{10\sqrt{3}}$ ニヌネ

(3) 内心 I により △ABI, △BCI, △CAI とすると これらは 内接円の半径 r を共通の高さとする三角形.

$S = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$ ∴ $r = \underline{\sqrt{3}}$ ノ

(4) 正弦定理により

$2R = \frac{CA}{\sin\angle ABC}$ ∴ $R = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$ ハヒフ

(5) I から BC への垂線の足を D とする。

図のように 3辺は x, y, z を用いた和で表せる.

$$\begin{cases} x+y=8 \\ y+z=5 \\ x+z=7 \end{cases}$$

$x+y+z=10$ より

$BD = x = 5$

求める BI は $BI^2 = BD^2 + DI^2 = 5^2 + (\sqrt{3})^2 = 28$.

∴ $BI = \underline{2\sqrt{7}}$ ヘホ

[参考] BI を延ばし CA との交点を E とするとき

$\angle ABE = \angle CBE$ より

$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{8}$

$\angle ECI = \angle BCI$ より

$\frac{BI}{IE} = \frac{BC}{EC} = \frac{8}{5\times\frac{8}{15}} = \frac{3}{1}$

よって $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ を用いると

$\overrightarrow{BE} = \frac{8}{15}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{15}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{15}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{15}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{20}\overrightarrow{BC}$