早稲田大学　人間科学部　数学A方式　解答例

問1～7 は A方式, B方式 共通

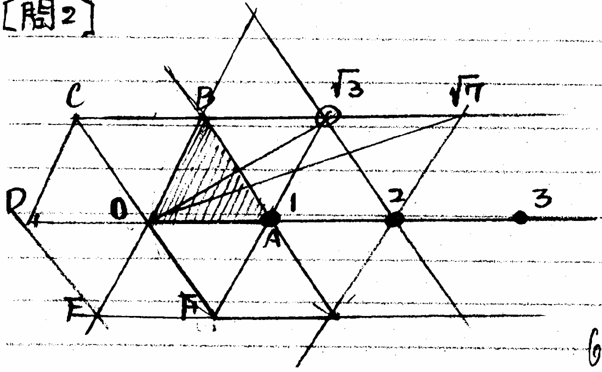
[問1] $p=\left(\frac{1}{125}\right)^{20}=(5^{-3})^{20}=5^{-60}=\left(10^{\log_{10}5}\right)^{-60}$

$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-0.3010=0.6990$

$p=(10^{0.6990})^{-60}=10^{-41.92}=10^{-42+0.08}<10^{-42}\times10^{\log_{10}2}=2\times10^{-42}$

よって p は小数第 $\underset{ア}{42}$ 位に初めて0でない数字が現れその値は $\underset{イ}{1}$

[問2]



左図のように正六角形の対称性を利用して△OAB をもとにOA, OBを延長した部分（右上部）で考える。

P_0P_2 の長さは $0,\ 1,\ \sqrt{3},\ 2$ が考えられ

全体 36 通りに対して

長さ	0	1	$\sqrt{3}$	2
組合せ	1	2	2	1

それぞれ 6倍して 求める期待値は

$6\times\frac{1}{36}\left\{0^2\times1+1^2\times2+(\sqrt{3})^2\times2+2^2\times1\right\}=\underset{ウ}{2}$

P_0P_3 の長さは $0,1,\sqrt{3},2,\sqrt{7},3$ が考えられ　全体($6^3=$)216通りに対して

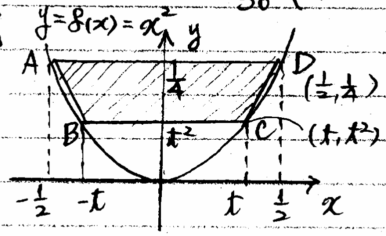
長さ	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{7}$	3
組合せ	2	15	6	6	6	1

↳ 余事象とする

同様に　$6\times\frac{1}{6^3}\left\{0^2\times2+1^2\times15+(\sqrt{3})^2\times6+2^2\times6+(\sqrt{7})^2\times6+3^2\times1\right\}$

$=\frac{1}{36}(15+18+24+42+9)=\underset{エ}{3}$

[問3]



$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ とするとき

四角ABCDは等脚台形であるので面積を $S(t)$

$0<t<\frac{1}{2}$

$S(t)=2\times\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)\right\}$

$=\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(-t^2+\frac{1}{4}\right)=-t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}$

$S'(t)=-3t^2-t+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(6t-1)(4t+1)$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
S'		+	0	−	
S		↗	極大	↘	

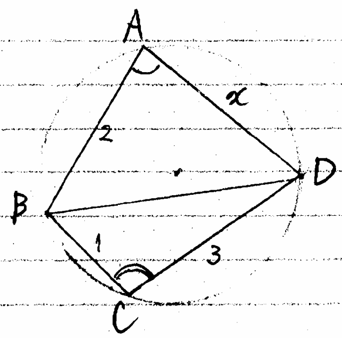
増減表より $S(t)$ は

$t=\underset{オカ}{\frac{1}{6}}$ のとき 極大かつ最大となり

$S\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{9}=\underset{キ,ク}{\frac{4}{27}}$

[問4] $AD = x$ とする. $\angle BCD = \theta$ とするとき

$\cos\theta = -\frac{1}{6}$ より　$\sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$



$\triangle BCD$, $\triangle BAD$ にそれぞれ余弦定理を適用すると

$\cos\angle BAD = \cos(180^\circ-\theta) = \frac{1}{6}$

$BD^2 = BC^2+CD^2-2BC\times CD\times\cos\theta$

$= 10 - 2\times1\times3\times\left(-\frac{1}{6}\right) = 11$

$BD^2 = AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos(180^\circ-\theta)$

$11 = x^2+4-\frac{2}{3}x$

$3x^2-2x-21=0 \iff (x-3)(3x+7)=0$

$x>0$ より　$AD = 3$ ケ

また $\triangle BCD + \triangle DAB = \frac{1}{2}\sin\theta\,(BC\times CD + DA\times AB) = \frac{3\sqrt{35}}{4}$ コ

[問5] $i-\frac{3}{i} = i+\frac{3i^2}{i} = 4i$ が解のとき

方程式は実数を係数とするので $-4i$ も解といえる

$x^3+ax^2+bx+c = (x^2+16)(x-p)$ とおけて.

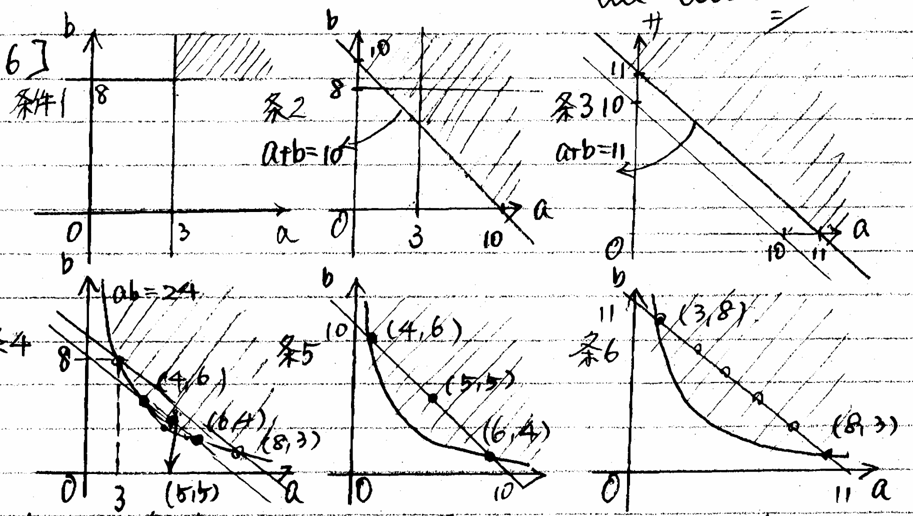
右辺は $x^3-px^2+16x-16p=0$

より $a+b+c=-18 \rightleftarrows (-p)+16+(-16p)=-18$

$p=2$

よって 残りの2解は $x = 2$ サ, $-4i$ シ

[問6]



領域内の格子点をしらべて　条件1 は他のすべての条件の十分条件. ス

条件2 は すべての条件の必要条件。セ　また 条件4 と 5 は同値 ソ

条件3 は満たし 4 を満たさない (a,b) の組は タ

$a=1,2,\cdots,10,\cdots 23$ について調べる。たとえば $a=1$ のとき $b=10,\cdots,23$ の 14コあり

$a=2$: $b=9,10,11$, $a=3,4,\cdots,8$ については ない　$a=b$ についての対称性を

考えて 求める組は　$2\times(3+14) = 34$ 個ある チ

[問7] $S_n = n(2n+1)$ ， $S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$

$n=1$ のとき $S_1 = a_1 = 3$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} = n(2n+1)-(n-1)(2n-1) = \underset{ツ}{4n}\underset{テ}{-1}$

これは $n=1$ でも成り立つ.

$b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n+1$ より

$b_{n+1}+1 = 2(b_n+1)$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項2, 公比2の等比数列.

$b_n+1 = 2^n$.

よって $c_n = a_n \times (b_n+1) = (4n-1)\times 2^n$

$T_n = 3\times 2 + 7\times 2^2 + 11\times 2^3 + \cdots + (4n-1)\times 2^n$

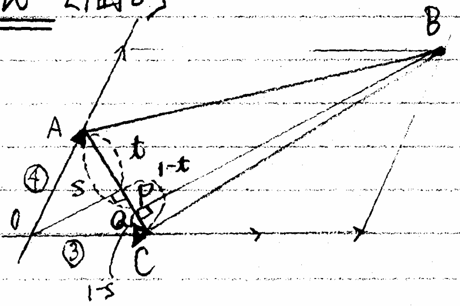
$2T_n = \quad\quad 3\times 2^2 + 7\times 2^3 + \quad (4n-5)\times 2^n + (4n-1)2^{n+1}$

辺々差をとってまとめると

$-T_n = 6 + 4\{2^2+2^3+\cdots+2^n\} - (4n-1)2^{n+1}$

$T_n = \underbrace{(4n-5)}_{ト,ナ}\underbrace{2^{n+1}}_{ニ} + \underbrace{10}_{ヌ}$

A方式 [問8]



$|\overrightarrow{OA}|=4$, $|\overrightarrow{OC}|=3$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

より $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2$

$= |\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) = 19$

$|\overrightarrow{AC}| = \underbrace{\sqrt{19}}_{ネ}$

$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{AP} = \frac{13}{19}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AC}$ のとき

$\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB} = \{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\}-\{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}\} = (-1-s)\overrightarrow{OA}+(s-3)\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より $((-1-s)\overrightarrow{OA}+(s-3)\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$

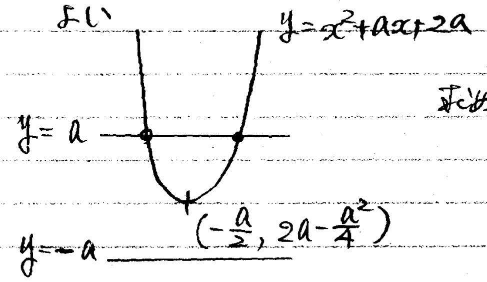
$(-1-s)|\overrightarrow{OA}|^2+(2s-2)(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})-(s-3)|\overrightarrow{OC}|^2=0$

$5-19s=0 \quad \therefore s = \underbrace{\frac{5}{19}}_{ノ,ハ}$

さらに $PQ = AC\times\left|\frac{13}{19}-\frac{5}{19}\right| = \underbrace{\frac{8}{\sqrt{19}}}_{ヒ,フ}$

[問9] $|x^2+ax+2a| = a \rightleftarrows x^2+ax+2a = \pm a$

$y = x^2+ax+2a$ のグラフと $y=a$, $y=-a$ の共有点が2コとなるようにすればよい



$y = (x+\frac{a}{2})^2+2a-\frac{a^2}{4}$

求める条件は $a>0$ の下で

$-a < 2a-\frac{a^2}{4} < a$

各々これを解いて

$\begin{cases} a(a-4)>0 \\ a(a-12)<0 \end{cases}$

よって $\underbrace{4}_{ヘ} < a < \underbrace{12}_{ホ}$