早稲田大学　人間科学部　数学Ｂ方式　解答例

問1～7 は A方式，B方式 共通

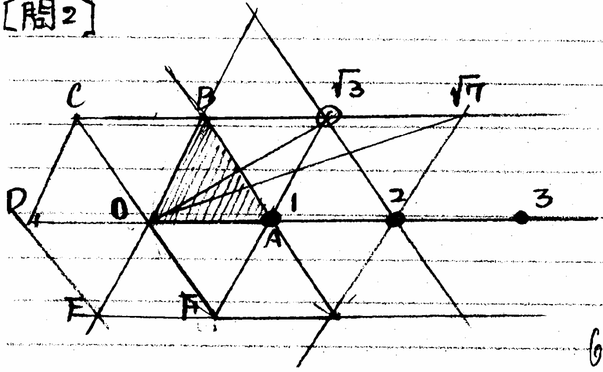
［問1］ $p=\left(\frac{1}{125}\right)^{20}=(5^{-3})^{20}=5^{-60}=\left(10^{\log_{10}5}\right)^{-60}$

$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-0.3010=0.6990$

$p=(10^{0.6990})^{-60}=10^{-41.94}=10^{-42+0.06}<10^{-42}\times10^{\log_{10}2}=2\times10^{-42}$

よって p は 小数第$\underset{ア}{42}$位 に初めて0でない数字が現れ その値は $\underset{イ}{1}$

［問2］



左図のように正六角形の対称性を利用して△OAB をもとに OA，OB を延長した部分（右上部）で考える。

P_0P_2 の長さは 0，1，$\sqrt{3}$，2 が考えられ 全体 36 通りに対して

長さ	0	1	$\sqrt{3}$	2
組合せ	1	2	2	1

それぞれ 6倍して 求める期待値は

$6\times\frac{1}{36}\left\{0^2\times1+1^2\times2+(\sqrt{3})^2\times2+2^2\times1\right\}=\underset{ウ}{2}$

P_0P_3 の長さは 0，1，$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{7}$，3 が考えられ 全体$(6^3=)216$通りに対して

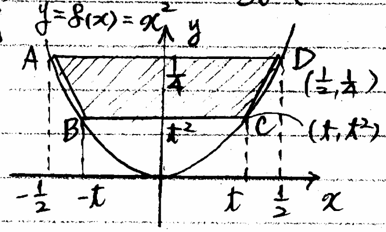
長さ	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{7}$	3
組合せ	2	15	6	6	6	1

↪ 余事象とする

同様に $6\times\frac{1}{6^3}\left\{0^2\times2+1^2\times15+(\sqrt{3})^2\times6+2^2\times6+(\sqrt{7})^2\times6+3^2\times1\right\}$

$=\frac{1}{36}(15+18+24+42+9)=\underset{エ}{3}$

［問3］



四角ABCDは 等脚台形 であるので 面積を $S(t)$ とするとき

$0<t<\frac{1}{2}$

$S(t)=2\times\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)\right\}$

$=\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(-t^2+\frac{1}{4}\right)=-t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}$

$S'(t)=-3t^2-t+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(6t-1)(4t+1)$

t	0	…	$\frac{1}{6}$	…	$\frac{1}{2}$
S'		+	0	−	
S		↗	極大	↘	

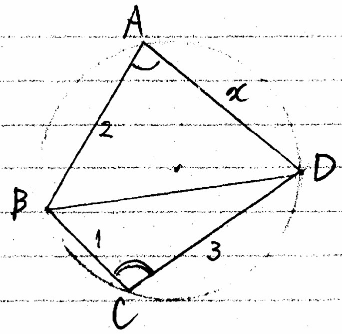
増減表より $S(t)$ は

$t=\underset{オカ}{\frac{1}{6}}$ のとき 極大かつ最大となり

$S\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{9}=\underset{キ,ク}{\frac{4}{27}}$

［問4］ AD = x とする. $\angle BCD = \theta$ とするとき

$\cos\theta = -\frac{1}{6}$ より $\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$



$\triangle BCD$, $\triangle BAD$ にそれぞれ余弦定理を適用すると

$$\cos\angle BAD = \cos(180^\circ - \theta) = \frac{1}{6}$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos\theta$$
$$= 10 - 2 \times 1 \times 3 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 11$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos(180^\circ - \theta)$$
$$11 = x^2 + 4 - \frac{2}{3}x$$

$$3x^2 - 2x - 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(3x+7) = 0$$

$x > 0$ より $\quad AD = \underset{\sim}{3}$ ケ

また $\triangle BCD + \triangle DAB = \frac{1}{2}\sin\theta\,(BC \times CD + DA \times AB) = \frac{3\sqrt{35}}{4}$ コ

［問5］ $i - \frac{3}{i} = i + \frac{3i^2}{i} = 4i$ が解のとき

方程式は実数を係数とするので $-4i$ も解といえる

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2+16)(x-p)$ とおけて.

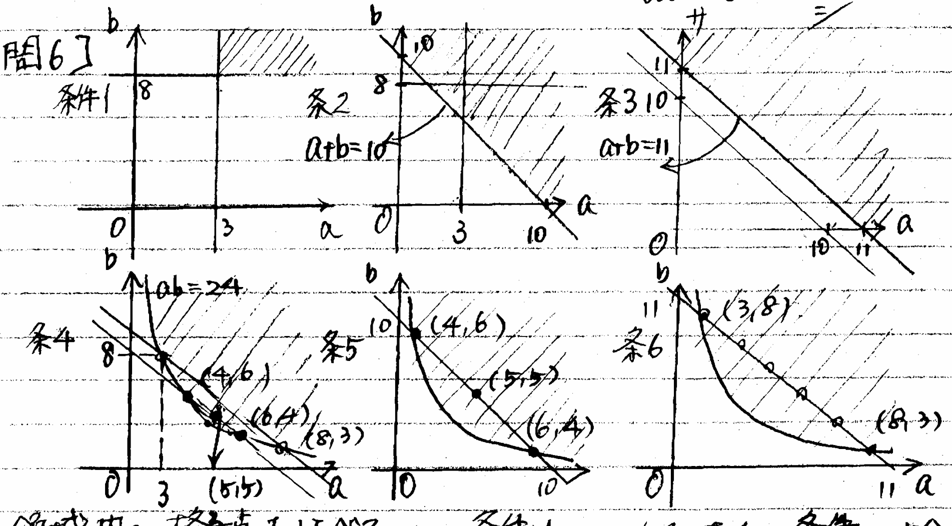
右辺は $x^3 + px^2 + 16x - 16p = 0$

より $a+b+c = -18 \rightleftarrows (-p) + 16 + (-16p) = -18$

$p = 2$

よって 残りの2解は $x = \underset{\sim}{2}$ サ, $\underset{\sim}{-4i}$ シ

［問6］



領域内の格子点をしらべて 条件1 は他のすべての条件の十分条件. ス

条件2 は すべての条件の必要条件。セ また 条件4と5は同値

条件3は満たし4を満たさない (a,b) の組は ソ タ

$a = 1, 2, \cdots, 10, \sim 23$ について調べる。たとえば $a=1$ のとき $b = 10, \cdots, 23$ の14コあり

$a = 2$: $b = 9, 10, 11$, $a = 3, 4, \cdots, 8$ についてはない $a = b$ についての対称性を

考えて 求める組は $2 \times (3 + 14) = \underset{\sim}{34}$ 個ある チ

[問7] $S_n = n(2n+1)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$n=1$ のとき $S_1 = a_1 = 3$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} = n(2n+1) - (n-1)(2n-1) = \underbrace{4}_{ツ}n - \underbrace{1}_{テ}$

これは $n=1$ でも成り立つ.

$b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$ より

$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項2, 公比2の等比数列.

$b_n + 1 = 2^n$.

よって $c_n = a_n \times (b_n + 1) = (4n-1) \times 2^n$

$T_n = 3 \times 2 + 7 \times 2^2 + 11 \times 2^3 + \cdots + (4n-1) \times 2^n$

$2T_n = 3 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + (4n-5) \times 2^n + (4n-1)2^{n+1}$

辺々差をとってまとめると

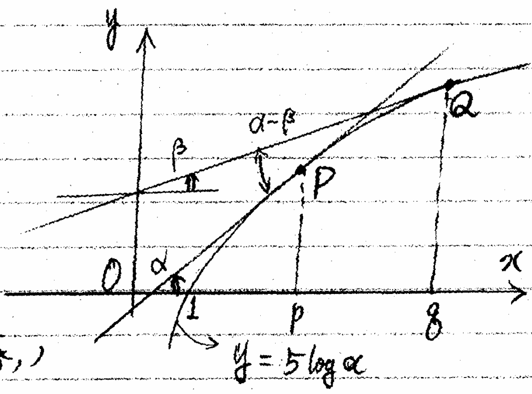
$-T_n = 6 + 4\{2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n\} - (4n-1)2^{n+1}$

$T_n = \underbrace{(4n-5)}_{ト,ナ}\underbrace{2}_{ニ}{}^{n+1} + \underbrace{10}_{ヌ}$

B方式 [問8]

$y=5\log x \qquad y'=\dfrac{5}{x}$

2点、P, Q における接線の傾きはそれぞれ $\dfrac{5}{p}$, $\dfrac{5}{q}$ （$p<q$ より $\dfrac{5}{p}>\dfrac{5}{q}$）



$\tan\alpha=\dfrac{5}{p}$, $\tan\beta=\dfrac{5}{q}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5(q-p)}{pq+25}$ …ホ,ニ

p, q 整数 $(0<p<q)$ で

$\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ のとき

$pq+25=5(q-p)$

$\rightleftarrows \quad (p-5)(q+5)=-50$

$(p,q)=(3,20),(4,45)$ より求めるものは 45 …ハ

[問9] 3点 P, Q, R の座標を求めればよい。

$A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ $(k>0)$ より

1×1, 2×1 の成分では $k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\dfrac{3^2+1^2}{25}=\dfrac{10}{25}$

$\therefore\ k=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ と

$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ で A は原点のまわりに θ の回転と k 倍の伸縮を与える1次変換。

P(10, 0) より Q は $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

R は $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP}=(4,-2)$, $\overrightarrow{QR}=\left(\dfrac{-14}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ より

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\left|4\times\dfrac{2}{5}-(-2)\times\dfrac{-14}{5}\right|=2$ …ト