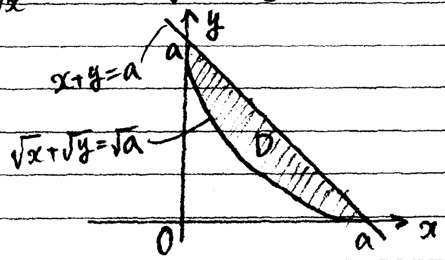
早稲田大学　基幹/創造/先進理工学部　数学　解答例

[I] (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ より $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$ 　$0\leqq x\leqq a$

$y=x-2\sqrt{a}\sqrt{x}+a$ 　$y'=1-\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}<0$ 　$y''=\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{3}{2}}>0$

求める面積は1辺 a の直角二等辺三角形から

Dと両軸で囲まれた部分を除いたもの

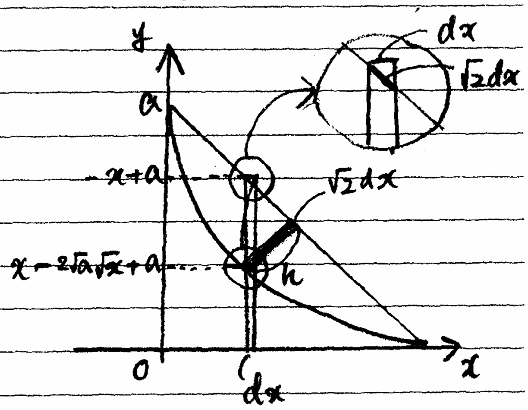


$$S=\frac{1}{2}a^2-\int_0^a(x-2\sqrt{a}\sqrt{x}+a)dx=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^2$$

$$=\frac{1}{6}a^2 \quad \text{---[答]}$$

(2) D内で右図の h の長さ(垂線)は

$$h=\frac{(-x+a)-(a+x-2\sqrt{a}\sqrt{x})}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(\sqrt{a}\sqrt{x}-x)$$



求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^a h^2(\sqrt{2}dx)$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^a\left(ax-2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{15}a^3 \quad \text{---[答]}$$

[II] (1) $f(m,n)=100$

$\Leftrightarrow\ 200=(m+n-1)^2+(m-n+1)$

$\Leftrightarrow\ m-(n-1)=200-\{m+(n-1)\}^2$

$m+(n-1)=14$ とするとき $m-(n-1)=200-196=4$

$\therefore\ m=9,\ n=6$

(2) $a^2+b=c^2+d \Leftrightarrow a^2-c^2=d-b$

$\Leftrightarrow (a+c)(a-c)=d-b$

ここで $-a\leqq b\leqq a,\ -c\leqq d\leqq c$ のとき …$\circledast$

$-(c+a)<d-b<c+a$ 　$\therefore\ |d-b|<|c+a|$

このとき $|a+c||a-c|=|d-b|<|c+a|$ より

$|a-c|<1$ さらに a,c は整数より $a=c$

また $a^2-c^2=d-b=0$ より $b=d$

(3) $f(m,n)=f(m_0,n_0)=k$ とする

$(m+n-1)^2+(m-n+1)=(m_0+n_0-1)^2+(m_0-n_0+1)$

$n-1\geqq 0,\ n_0-1\geqq 0$ より

$-(m+n-1)<m-(n-1)\leqq m+n-1$

$-(m_0+n_0-1)<m_0-(n_0-1)\leqq m_0+n_0-1$

(2)の$\circledast$より $(m,n)=(m_0,n_0)$ より $f(m,n)=k$ をみたす (m,n) の組は1つに限られる。 $m+(n-1)=k'$ とすると

$$\begin{cases} m-(n-1)=2k-\{m+(n-1)\}^2=2k-k'^2 \\ m+(n-1)=k' \end{cases}$$

また $m=\frac{1}{2}\{2k+k'-k'^2\},\ n=\frac{1}{2}\{-2k+k'^2+k'\}+1$ とおける。

(k' は整数)

[III] $f(2x)=(e^x+1)f(x)$ ---①

(1) $x=0$のとき $f(0)=(e^0+1)f(0)$ $\therefore$ $f(0)=0$ ---[答]

(2) ①において

$$f\left(2\times\frac{x}{2}\right)=\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$e^x-1=(e^{\frac{x}{2}}+1)(e^{\frac{x}{2}}-1)$ より $x\neq 0$のとき

$$\frac{f(x)}{e^x-1}=\frac{e^{\frac{x}{2}}+1}{e^x-1}\times f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-1}$$

(3) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ $(\because f(0)=0)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{e^h-1}\times\frac{e^h-1}{h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=(e^x)'\Big|_{x=0}=1$ より $f'(0)$は$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{e^h-1}$

と一致する。

(4) $x\neq 0$のとき (2)の結果をくり返し用いると

$$\frac{f(x)}{e^x-1}=\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-1}=\cdots=\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}}-1}$$

任意の整数 nについて成り立つので $n\to\infty$のとき

$$\frac{f(x)}{e^x-1}=f'(0) \quad \therefore \ f(x)=(e^x-1)f'(0)$$

[IV] (1) $n=3$の時 球の入れ方は 1コにつき3通りあるので 全体は $3^3=27$通り。2箱が空のとき 1箱に3コが入るのでその箱の選び方が3通り

$$p_3=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$ ---[答]

$n=4$のとき 球の入れ方 3^4通りに対して 2箱が空のとき 残りの2箱に球の入れ方は 1コと3コ, 2コと2コ

$$p_4=\frac{1}{4^4}\times{}_4C_2\times\{{}_4C_2+2\times{}_4C_1\}=\frac{21}{64}$$ ---[答]

(2) $n\geqq 4$ 入れ方はn^n通りで 空2箱は${}_nC_2$通りで選ばれる。
残り $n-2$ コの箱のうち 3コの球を入れる箱は ${}_{n-2}C_1=n-2$ 通りで選ばれる。その箱に入る3コの球の選び方は ${}_nC_3$ 通り。
さらに 残り $n-3$ コの球を残りの $n-3$ コの箱に入れる方法が $(n-3)!$ 通り

$$q_n=\frac{1}{n^n}\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times(n-2)\times(n-3)!$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)n!}{12\,n^n}$$ ---[答]

(3) $n\geqq 5$ 2箱のみが空になるのは

① 2箱のみ空で残り1箱に3コの球, $(n-3)$コの箱に1コずつの球が入る。

② 2箱のみ空で残り2箱には2コずつの球, $(n-4)$コの箱に1コずつの球が入る。

ときが考えられる。

② のとき　（空の箱の選び方）×（2コの箱の選び方）×［球の入れ方］

$$({}_nC_2) \times ({}_{n-2}C_2) \times [\,{}_nC_2 \times {}_{n-2}C_2 \times (n-4)!\,]$$

求める確率 p_n は ①②をあわせて

$$p_n = \frac{1}{12}\times\frac{n(n-1)(n-2)n!}{n^n} + \frac{1}{16}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)n!}{n^n}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)n!}{48\cdot n^n}$$ ---［答］

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n-5} = 0$ ---［答］

[V] (1) $NP = NQ = r \quad (r>0)$

P, Qは ともに 球面

$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+(z-1)^2=r^2$

上にある 辺々 差をとって　$2z-1 = 1-r^2$

P, Qは $z = \frac{2-r^2}{2}$ =［定数］より 平面 $z = 1-\frac{r^2}{2}$

上にあるので $P_z = Q_z$

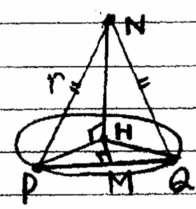
(2)　Pが $z=h \left(= 1-\frac{r^2}{2}\right)$ 上にあるとき

$r^2 = 2(1-h)$

$NP=NQ=r=\sqrt{2(1-h)}$ より △NPQに余弦定理を用いると

$$PQ^2 = NP^2+NQ^2-2NP\times NQ\times\cos\theta$$
$$= 2(1-h)+2(1-h)-2\left(\sqrt{2(1-h)}\right)^2\cos\theta$$
$$= 4(1-h)(1-\cos\theta)$$
$$PQ = 2\sqrt{(1-h)(1-\cos\theta)}$$ ---［答］

(3)　$H(0,0,h)$ とする　N, Hはz軸上にあり



$NH = 1-h$

$PH = \sqrt{NP^2-NH^2}$
$= \sqrt{r^2-(1-h)^2}$
$= \sqrt{2-2h-(1-h)^2} = \sqrt{1-h^2}$

P, Qは 平面 $z=h$ 上にあり かつ

中心 $H(0,0,h)$，半径 $PH=\sqrt{1-h^2}$ とする円周

上を動く　PQの中点をMとするとき

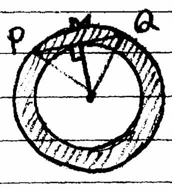
$HM^2 = PH^2-\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2$

断面積を $S(h)$ とすると　$S(h) = \pi(PH^2-HM^2) = \pi\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = \pi(1-h)(1-\cos\theta)$

①　$HM>0 \Leftrightarrow (1-h)(h+\cos\theta)>0$

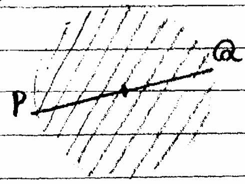
$-\cos\theta < h < 1$ のとき

$S(h) = \pi(1-h)(1-\cos\theta)$



②　$h=-\cos\theta$ のとき

$S(h) = \pi\sin^2\theta$



③　$h>1$, $h<-\cos\theta$ のとき　$S(h)=0$

(4) $-\cos\theta \leqq h \leqq 1$ において

$$V = \int_{-\cos\theta}^{1} \pi (1-h)(1-\cos\theta)\, dh$$

$$= \pi(1-\cos\theta)\left[h - \frac{1}{2}h^2\right]_{-\cos\theta}^{1}$$

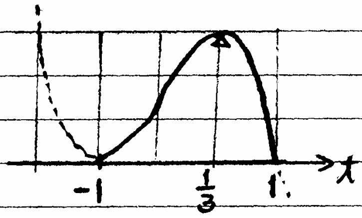
$$V = \frac{1}{2}\pi(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^2$$

$\cos\theta = t$ として $V = f(t)$ とおくとき

$-1 < t < 1$ において $f(t) = \frac{\pi}{2}(1-t)(1+t)^2$

$$f'(t) = \frac{\pi}{2}(1+t)(1-3t)$$

$f(t)$ は $t = \frac{1}{3}$ のとき 極大かつ最大.



$$\mathrm{Max}\ V = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{27}\pi$$ …[答]