早稲田大学　スポーツ科学部　数学　解答例

問1. (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ はいずれも等差数列なので a_n, b_n は n の1次式で表される。

$$a_n + 2b_n = 8n - 1 \quad \cdots ①$$

$$a_n \times 2b_n = 15n^2 - 7n - 2 = (3n-2)(5n+1) \quad \cdots ②$$

①②より　$a_n, 2b_n$ を解（n の式）とする X の2次方程式は

$$X^2 - (8n-1)X + (3n-2)(5n+1) = 0$$

$$\rightleftarrows \ \{X - (3n-2)\}\{X - (5n+1)\} = 0$$

$a_1 = 1$ より　$a_n = 3n-2$　　　イ] ウ]

$2b_n = 5n+1$　∴ $b_1 = 3$, $b_n = \dfrac{5n+1}{2}$　　ア] エ] オ]

(2) $6^x - 2\cdot 2^x - 9\cdot 3^x + 18 \leqq 0$

$\Leftrightarrow \ 2^x \times 3^x - 2\cdot 2^x - 9\cdot 3^x + 18 = (2^x - 9)(3^x - 2) \leqq 0$

(i) $2^x - 9 \geqq 0$ かつ $3^x - 2 \leqq 0$

または (ii) $2^x - 9 \leqq 0$ かつ $3^x - 2 \geqq 0$

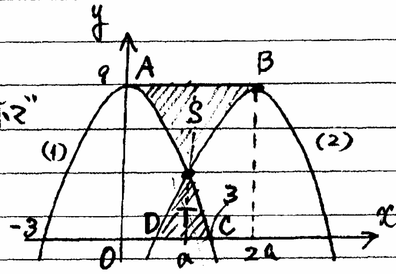
(i)のとき　$2^x \geqq 2^{\log_2 9}$　$x \geqq 3\log_2 3 > 1$
$3^x \leqq 3^{\log_3 2}$　$x \leqq \log_3 2 < 1$　} より解なし

(ii)のとき　$\log_3 2 \leqq x \leqq \log_2 9$

$\log_3 2 < \log_3 3 = 1$,　$\log_2 9 > \log_2 8 = 3$

より　最小のものは 1，最大のものは 3　　カ] キ]

問2　(1)は $y = -x^2 + 9$ より頂点が $(0, 9)$ の放物線。
(2)は $y = -(x-2a)^2 + 9$ より (1)を x 軸方向に a だけ平行移動したものである。(1)(2)は直線 $x = a$ に関して対称で $0 < a < 3$ より右図のようになる。



$$S = 2\int_0^a \{9 - (-x^2+9)\}\,dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$= \frac{2}{3}a^3$$

$$T = 2\int_a^3 \{-x^2+9\}\,dx = 2\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_a^3$$
$$= \frac{2}{3}a^3 - 18a + 36$$

$f(a) = S + T$ とすると

$0 < a < 3$　　$f(a) = \frac{4}{3}a^3 - 18a + 36$

$f'(a) = 4a^2 - 18 = 4\left(a + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘	極小	↗	

$f(a) \geqq f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 - 18\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + 36$
$= 36 - 18\sqrt{2}$

よって　$S + T$ は $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $36 - 18\sqrt{2}$ をとる
ク] ケ] コ]

問3.　x軸に接する半径1の円のとき　$C(a, \pm 1)$

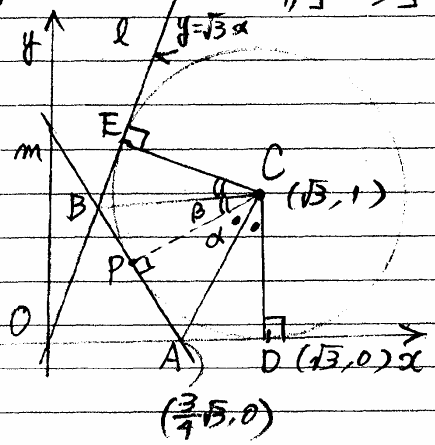
とおけて　さらに　$y=\sqrt{3}x$ と C の距離が 1 より

$$\frac{|\sqrt{3}a \pm 1|}{2} = 1 \qquad \sqrt{3}a \pm 1 = \pm 2 \qquad \therefore\ a = \pm\sqrt{3},\ \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$$

このうち解答の形式に合うものは　$C(\sqrt{3}, 1)$　　サ]　シ]

右図のように　円Cと x軸，直線 $y=\sqrt{3}x$ との

交点を D, E とする



$\triangle CDA \equiv \triangle CPA$，$\triangle CEB \equiv \triangle CPB$　---※

より　$DA = AP = \sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$　　ス]

$\angle AOB = 60°$ より $\angle DCE = 120°$

※より　$\angle DCE = 2(\alpha+\beta)$

よって $\alpha+\beta = 60°$ より　$\tan(\alpha+\beta) = \sqrt{3}$　　セ]

$CP=1$ より　$\tan\alpha = \frac{AP}{CP} = \frac{\sqrt{3}}{4}$，$\tan\beta = BP$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \sqrt{3}$$

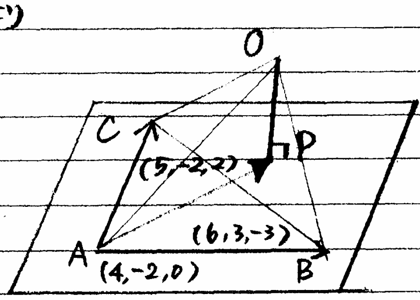
$$\rightleftarrows\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \tan\beta = \sqrt{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\tan\beta\right) \qquad \therefore\ \tan\beta = BP = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$　ソ]

よって　$AB = AP + BP = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{7}\sqrt{3} = \frac{19\sqrt{3}}{28}$　　タ]　チ]

問4.　$A(4,-2,0)$，$B(10,1,-3)$，$C(9,-4,2)$ より

$\overrightarrow{AB} = (6, 3, -3)$，$\overrightarrow{AC} = (5, -2, 2)$

$|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{33}$，$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 18$ より



(a)　$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\alpha$

$\rightleftarrows\ 18 = 3\sqrt{6} \times \sqrt{33} \times \cos\alpha$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{11}}$　　また　$0° \leqq \alpha \leqq 180°$ より

$\sin\alpha \geqq 0$　　よって　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$= \frac{3}{\sqrt{11}}$　　ツ]

(b)　Pは平面ABC上の点より　実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+6s+5t\\-2+3s-2t\\-3s+2t\end{pmatrix}$$

さらに

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$ より　$6(4+6s+5t) + 3(-2+3s-2t) - 3(-3s+2t) = 0$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AC}$ より　$5(4+6s+5t) - 2(-2+3s-2t) + 2(-3s+2t) = 0$

$18 + 54s + 18t = 0$，　$24 + 18s + 33t = 0$

$$\begin{cases} 1 + 3s + t = 0 \\ 8 + 6s + 11t = 0 \end{cases} \qquad t = -\frac{2}{3},\ s = -\frac{1}{9}\ \text{より}$$

$\overrightarrow{OP} = (0, -1, -1)$　　これはPの座標と一致する　　テ]　ト]　ナ]

(c) $\triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6} \times \sqrt{33} \times \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{27\sqrt{2}}{2}$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$ より 求める三角錐の体積 V は

$V = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times |\overrightarrow{OP}| = \underline{9}$　　ニ]

[参考] 平面ABCの法線ベクトルの1つを (p, q, r) とするとき

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ と垂直より

$6p+3q-3r=0$　　$2p+q-r=0$ ---①

$5p-2q+2r=0$ ---②

①×2+②　$9p=0$　$p=0$　$q=r=1$

$(p, q, r) = (0, 1, 1)$ より 平面の方程式は

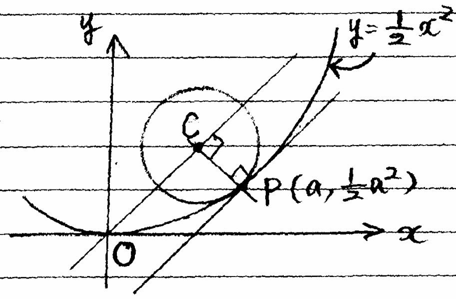
$y+z=-2$

O と平面のキョリは 点と平面のキョリの公式により

$OP = \frac{|2|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

と求めることができる。

問5. 円の中心をCとすると　$CP=1$ ---①



$y=\frac{1}{2}x^2$　$y'=x$

Cを通りPにおける接線に平行な直線が原点を通るので これを $y=ax$ とおけて

①より　$1 = \frac{|a \times a - \frac{1}{2}a^2|}{\sqrt{a^2+1}}$

$\frac{a^2}{2} = \sqrt{a^2+1}$　$\rightleftarrows$　$a^4 = 4(a^2+1)$

$(a^2)^2 - 4(a^2) - 4 = 0$, $a^2 > 0$ より　$a^2 = \underline{2+2\sqrt{2}}$　ヌ] ネ]

$CP \perp$ (直線 $y=ax$) より　$\overrightarrow{CP} = k(-a, 1)$, $k>0$ とおけて

$|\overrightarrow{CP}| = 1$ より　$k\sqrt{a^2+1} = 1$

$k\sqrt{3+2\sqrt{2}} = k(\sqrt{2}+1) = 1$　$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

よって　$a^2 = 2+2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$ のもとで

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$

$= (a, \frac{1}{2}a^2) + k(-a, 1)$

$= ((2-\sqrt{2})a, \frac{1}{2}a^2 + (\sqrt{2}-1))$

$= (\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \times \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$

$= (2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2}, 2\sqrt{2})$

$\overrightarrow{OC} = \underline{(2\sqrt{\sqrt{2}-1}, 2\sqrt{2})}$　これは円の中心Cと一致する

ノ] ハ] ヒ]