早稲田大学 教育学部 数学 解答例

[1]

(1) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

とおく

$f(1+i)=(-2a+c+d)+(2a+2b+c)i$

$f(1+2i)=(-11a-3b+c+d)+(-2a+4b+2c)i$

より

$$\begin{cases} -2a+c+d=4 \\ 2a+2b+c=3 \\ -11a-3b+c+d=4 \\ -2a+4b+2c=0 \end{cases}$$

以上より. $a=1,\ b=-3,\ c=7,\ d=-1$

$f(x)=x^3-3x^2+7x-1$

(2). $A(t,\ at^2)$ をとる。

$PQ^2=t^2+(at^2-p)^2$

$=t^2+a^2t^4-2apt^2+p^2$

$=a^2t^4+(1-2ap)t^2+p^2$

$t^2=X$ とおくと. $(X\geqq 0)$

$PQ^2=a^2X^2+(1-2ap)X+p^2$

$=a^2\left(X+\dfrac{1-2ap}{2a^2}\right)^2+\cdots\cdots$

軸 $X=\dfrac{2ap-1}{2a^2}$ が0以下で

あれば $X=0$ のとき最小。

$2ap-1\leqq 0 \Leftrightarrow a\leqq\dfrac{1}{2p}$

aの最大値 $\dfrac{1}{2p}$

(3). 点 n から出発して. 点5に到達して終了する確率を $P(n)$ とおく。

$$\begin{cases} P(n)=\dfrac{2}{3}P(n+1)+\dfrac{1}{3}P(n-1) \\ P(0)=0,\quad P(5)=1. \end{cases}$$

特性方程式

$x=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}$ の解

$x=1,\ \frac{1}{2}$ を用いて.

$P(n)=A\cdot 1^n+B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ と書ける.

$P(0)=A+B=0$

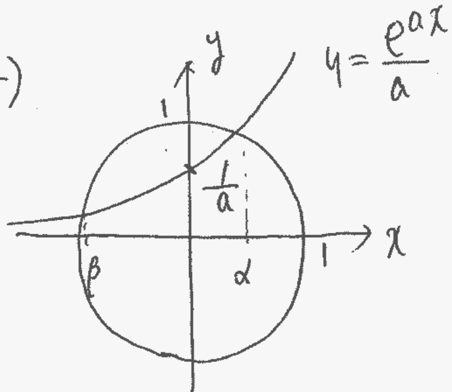
$P(5)=A+\dfrac{B}{32}=1$ より

$A=\dfrac{32}{31}$ $B=-\dfrac{32}{31}$

$P(n)=\dfrac{32}{31}-\dfrac{32}{31}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$P(1)=\dfrac{32}{31}-\dfrac{32}{31}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{31}$

(4)



$\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{e^{a\alpha}}{a} < 1$.

よって. $a\alpha < \log a$

$\iff \alpha < \frac{\log a}{a}$

$0<\alpha$ より. $a\to 0$ のとき.

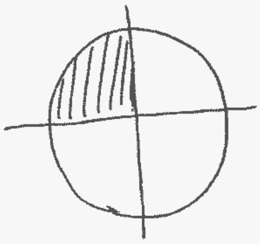
$\frac{\log a}{a} \to 0$ から $\alpha \to 0$.

また. $y=\frac{e^{ax}}{a}$ は $x=-1$ のとき

$y=\frac{e^{-a}}{a} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$.

$\beta \to -1$. $\frac{1}{a} \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$ より

$a\to\infty$ のとき 下図



よって.

$\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{2}$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}|^2$

$\iff \cancel{|\vec a|^2}+\cancel{|\vec b|^2}+\cancel{|\vec c|^2}+\cancel{2\vec a\cdot\vec b}+2\vec b\cdot\vec c+2\vec c\cdot\vec a$

$=\cancel{|\vec a|^2}+\cancel{|\vec b|^2}+\cancel{|\vec d|^2}+\cancel{2\vec a\cdot\vec b}+2\vec b\cdot\vec d+2\vec d\cdot\vec a$

$\iff \vec b\cdot\vec c+\vec c\cdot\vec a = \vec b\cdot\vec d+\vec d\cdot\vec a$

$\iff \vec b\cdot(\vec c-\vec d)+\vec a\cdot(\vec c-\vec d)=0$

$\iff (\vec c-\vec d)\cdot(\vec b+\vec a)=0$

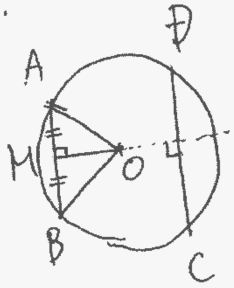
$\vec c \neq \vec d$ より.

$\vec b+\vec a=0$ … ㋐
または.
$\vec c-\vec d \perp \vec b+\vec a$ … ㋑.

㋐は 辺AB上にOがある.

㋑は. $\overrightarrow{DC} \perp \underbrace{\frac{1}{2}(\vec a+\vec b)}_{\overrightarrow{OM}}$

であるので.



AB // CD である //

(2) $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$,
$\triangle DAB$ の重心を各々
G_1, G_2, G_3, G_4 とする。

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{3}$$

$$\overrightarrow{OG_4} = \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$|\overrightarrow{OG_1}| = |\overrightarrow{OG_4}|$ より. $AB \parallel CD$ or $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ ①

$|\overrightarrow{OG_2}| = |\overrightarrow{OG_4}|$ より. $BD \parallel AC$ or $\vec{b}+\vec{d}=\vec{0}$ ②

$|\overrightarrow{OG_1}| = |\overrightarrow{OG_3}|$ より $AC \parallel BD$ or $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$ ③

③において. $AC \nparallel BD$ より $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$

よって $\vec{a}+\vec{c}=0$ が成立して.

ACが直径となる。このとき

①,② より. $\vec{a}+\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{c}+\vec{d} \neq \vec{0}$

だから $AB \parallel CD$ かつ $BD \parallel AC$

よって四角形 ABCDは長方形.

$\boxed{3}$

(1) $\left|1+\frac{1}{n}i\right|$

$= \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$ より.

$\left|1+\frac{1}{n}i\right|^n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$

$= \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{2n}}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1$

(2) $1+\frac{i}{n}$

$= \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}i\right)$

$= r_n\left(\cos\theta_n + i\sin\theta_n\right)$

とおく.

ただし. $r_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$

$\begin{cases} \cos\theta_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ \sin\theta_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{cases}$ をみたす.

$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = r_n{}^n\left(\cos n\theta_n + i\sin n\theta_n\right)$

である。

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

をみたすから.

$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ より.

$\sin\theta_n < \theta_n < \tan\theta_n$ である。

$n\cdot\sin\theta_n < n\theta_n < n\cdot\tan\theta_n$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < n\theta_n < 1.$

$n\to\infty$ のとき $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \to 1$

より. はさみうちの原理から

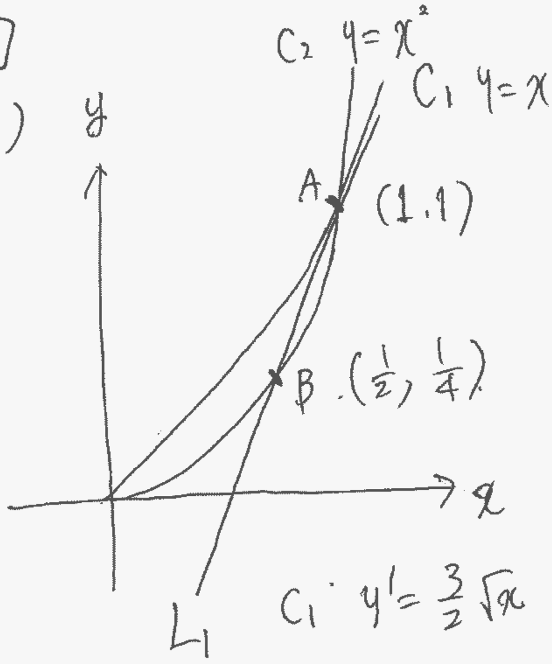
$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = 1.$

$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\left(\cos 1 + i\sin 1\right)$

$= \cos 1 + i\sin 1$ //

$\boxed{4}$

(1)



$C_1 \quad y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

L_1: $y-1 = \frac{3}{2}(x-1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$y=x^2$と連立して

$x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1)(x-1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 1.$

L_1とC_2の交点は

$A(1,1)$ $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$である.

$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}}$

$= \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

(2)

$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+9x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\frac{2}{3}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$.

(3)

$S - (AB + OB)$

$= \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8) - \left(\frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

$= \frac{52\sqrt{13} - 32 - 27\sqrt{13} - 27\sqrt{5}}{27 \times 4}$

$= \frac{25\sqrt{13} - 32 - 27\sqrt{5}}{27 \times 4}$

$< \frac{25 \times 3.61 - 32 - 27 \times 2.23}{27 \times 4}$

$= \frac{-1.96}{27 \times 4} < 0.$

$S < AB + OB$ で

$AB + OB < t$ だから $S < t$ //.

(tはC_2の$0 \leqq x \leqq 1$における曲線の長さ)