早稲田大学 人間科学部 数学 解答例

文系方式･理系方式共通

【問１】 ア　1　イ　18　【問２】 ウ　17　【問３】 エ　2　オ　2　カ　3

文系方式

【問４】 キ　5　【問５】 ク　23　ケ　6　コ　24

理系方式

【問４】 キ　-1　ク　-1　ケ　2　【問５】 コ　48　サ　2

【問１】

1, 2, 3 の順列 a_1, a_2, a_3 の中で

$a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$ となるものは

$(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 1)$

$(3, 1, 2)$

の 2 通り.

6コの順列は 6! 通り

もとの引き出しに戻る3コの商品の選び方は ${}_6C_3 = 20$ 通り. 残りの3コの商品は、もとの引き出しに戻らないので上記の2通りある。

よって求める確率は

$$\frac{20 \times 2}{6!} = \frac{1}{18}$$

【問２】

$a_n = 99 + (n-1)d$ とおく.

$$S_{12-23} = S_{23} - S_{11}$$

$$= \frac{23}{2}(2 \times 99 + 22d)$$

$$- \frac{11}{2}(2 \times 99 + 10d)$$

$$= 1188 + 198d$$

これが 0 より.

$$1188 + 198d = 0 \iff d = -6$$

$$a_n = 99 + (n-1)(-6)$$

$$= -6n + 105$$

$$a_n > 0 \iff n < \frac{105}{6} = 17.5$$

17項まで ⊕

17 項目までの和が最大.

【問３】

$$\begin{cases} xy = p \\ x+y = q \end{cases}$$ とおく.

x、y を解にもつ２次方程式

の１つは

$t^2 - qt + p = 0$

x、y は実数より

$D = q^2 - 4p \geqq 0$

$\Leftrightarrow p \leqq \dfrac{q^2}{4} \cdots ①$

$x^2 + y^2 \leqq 1$

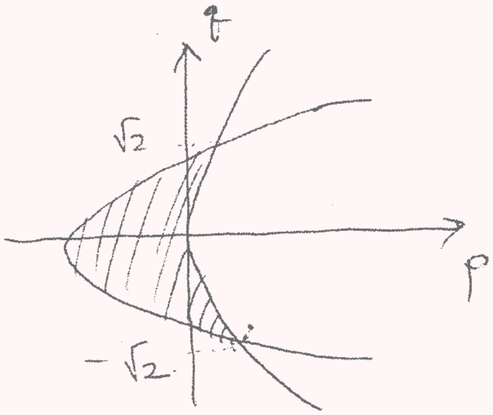
$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy \leqq 1$

$\Leftrightarrow q^2 - 2p \leqq 1$

$\Leftrightarrow p \geqq \dfrac{q^2}{2} - \dfrac{1}{2} \cdots ②$

点 (p, q) の存在範囲は

以下の通り.



$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{2} - \frac{1}{2}\right) dq$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}\, dq$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -(q^2 - 2)\, dq$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -(q-\sqrt{2})(q+\sqrt{2})\, dq$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{6}\left(\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}(2\sqrt{2})^3 = \frac{1}{24} 8 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

文系方式【問４】

$$\log_3(\log_3 x) = a$$

$$\Leftrightarrow\ 3^a = \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow\ x = 3^{3^a}$$

xが 116 ケタより

$$10^{115} \leqq x < 10^{116}$$

$$\Leftrightarrow\ \log_{10} 10^{115} < \log_{10} x < \log_{10} 10^{116}$$

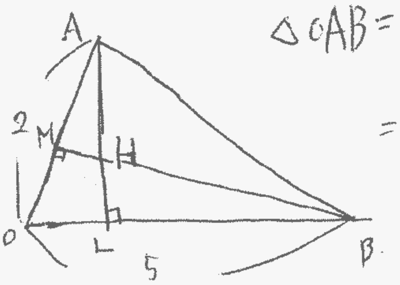
$$\Leftrightarrow\ 115 < \log_{10} 3^{3^a} < 116$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{115}{\log_{10} 3} < 3^a < \frac{116}{\log_{10} 3}$$

$$241.03\cdots < 3^a < 243.13$$

をみたす自然数 a は $\underline{5}$

文系方式【問５】



$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 2$ より

$$\cos\angle AOB = \frac{1}{5}$$

$$OL = 2\cos\angle AOB = \frac{2}{5}$$

$$LB = 5 - \frac{2}{5} = \frac{23}{5}$$

$$OL : LB = 2 : 23$$

$$OM = 5\cos\angle AOB = 1$$

$$OM : MA = 1 : 1$$

$\triangle OAL$ と直線 MB でメネラウスの定理を用いる.

$$\frac{AM}{MO}\cdot\frac{OB}{BL}\cdot\frac{LH}{HA} = 1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{1}\cdot\frac{25}{23}\cdot\frac{LH}{HA} = 1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{LH}{HA} = \frac{23}{25}$$

$$\triangle AHB = \frac{25}{48}\triangle ALB$$

$$= \frac{25}{48}\cdot\frac{23}{25}\triangle OAB = \underline{\frac{23}{24}\sqrt{6}}$$

理系方式【問４】

$z^7 - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow (z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$

$z \neq 1$ より z は

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$ …(*)

をみたす。

よって (1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = \underline{-1}$

(2) $z = \cos\frac{2}{7}\pi + i\sin\frac{2}{7}\pi$

のとき $z^7 = 1$ となる。

$\frac{2}{7}\pi = \theta$ とおくと、

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

$z^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

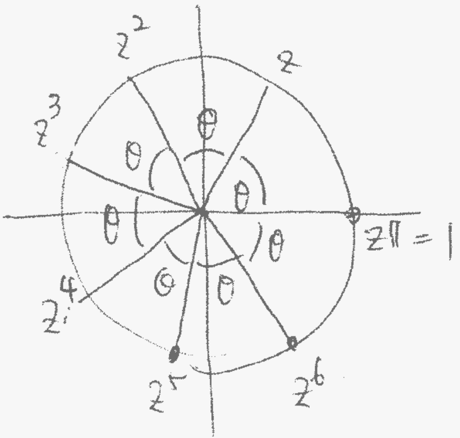
$$
Ⓐ\left\{
\begin{aligned}
z &= \cos\theta + i\sin\theta \\
z^2 &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\
z^3 &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \\
z^4 &= \cos 4\theta + i\sin 4\theta \\
z^5 &= \cos 5\theta + i\sin 5\theta \\
z^6 &= \cos 6\theta + i\sin 6\theta
\end{aligned}
\right.
$$

であり、

$$
\left(
\begin{aligned}
&\sin\theta + \sin 6\theta = 0 \\
&\sin 2\theta + \sin 5\theta = 0 \\
&\sin 3\theta + \sin 4\theta = 0
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&\cos\theta = \cos 6\theta \\
&\cos 2\theta = \cos 5\theta \\
&\cos 3\theta = \cos 4\theta
\end{aligned}
\right.
$$

より



Ⓐの辺々たすと

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 2(\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta)$

$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta = \underline{-\frac{1}{2}}$

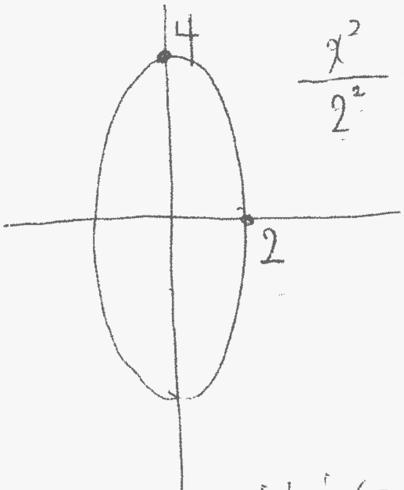
理系方式【問５】

$$4x^2-24x+y^2-4y+24=0$$

$$\iff 4(x-3)^2-36+(y-2)^2+20=0$$

$$\iff 4(x-3)^2+(y-2)^2=16$$

$$\iff \frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1 \quad Ⓐ$$

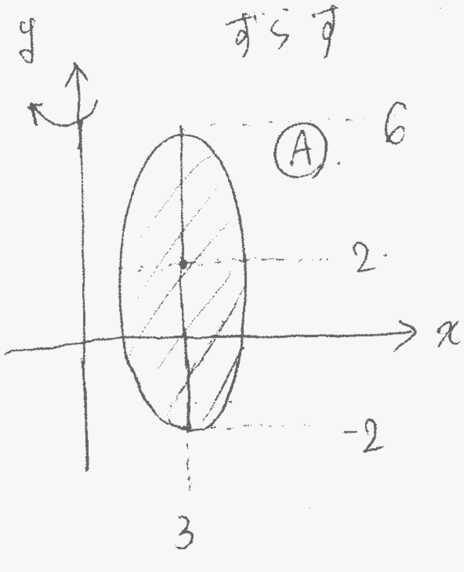


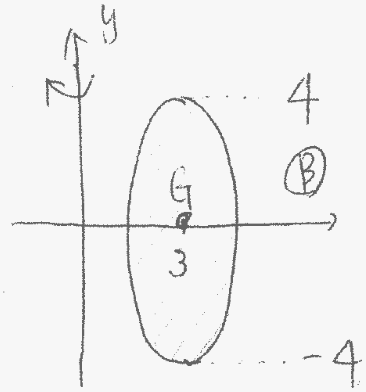
$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

⇓ x軸方向に 3

y　　　　　　2

ずらす





だ円Ⓑ

を y軸について回しても

同じである。

Ⓑ $\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

穴埋め式なので

パップスギュルダンの定理

を使うと

だ円の囲む面積

$S=\pi\cdot 2\times 4=8\pi$

$V=\underbrace{2\pi\cdot R}_{6\pi}\,S$

6π（重心Gのy軸回りに回したときの軌跡円の周の長さ）

$=6\pi\cdot 8\pi=48\pi^2$.