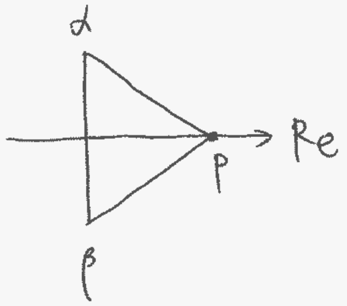
早稲田大学 基幹/創造/先進理工学部 数学 解答例

I $(x-p)(x^2+qx+r)=0$

$x^2+qx+r=0$ …(※) の解が虚数（実軸上に来ない）になることが必要で

$q^2-4r<0$ …①



このとき、α と β は互いに共役である。

$\mathrm{Re}(\alpha)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であり、これが p と異なれば $\triangle PAB$ が存在する。

解と係数の関係から、

$\alpha+\beta=-q$ より

$-\dfrac{q}{2}\neq p$ …②

$\triangle PAB$ が存在する

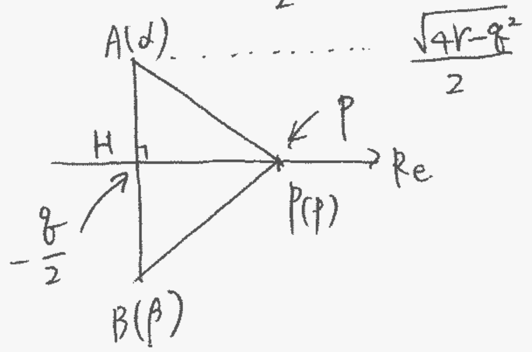
$\Leftrightarrow$ ①かつ②

$\Leftrightarrow$ $q^2-4r<0$ かつ $p\neq-\dfrac{q}{2}$

(2) (※)を解くと

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4r}}{2}$$

$$=\frac{-q\pm\sqrt{4r-q^2}\,i}{2}$$

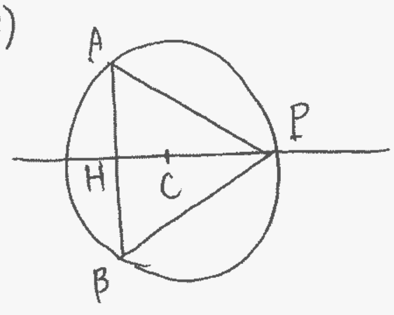


$AB=\sqrt{4r-q^2}$

$PH=\left|p+\dfrac{q}{2}\right|$

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot PH=\dfrac{1}{2}\sqrt{4r-q^2}\left|p+\dfrac{q}{2}\right|$

(3)



中心Qを表す複素数は実数でcとする。

$$PQ^2 = |p-c|^2 = (p-c)^2$$

$$AQ^2 = \left(\frac{\sqrt{4r-q^2}}{2}\right)^2 + \left(c+\frac{q}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4r-q^2}{4} + c^2 + qc + \frac{q^2}{4}$$

$$= r + c^2 + qc$$

よって. $(p-c)^2 = r + c^2 + qc$

$\Leftrightarrow p^2 - 2pc + c^2 = r + c^2 + qc$

$\Leftrightarrow (q+2p)c = p^2 - r$

$q \neq -2p$ より.

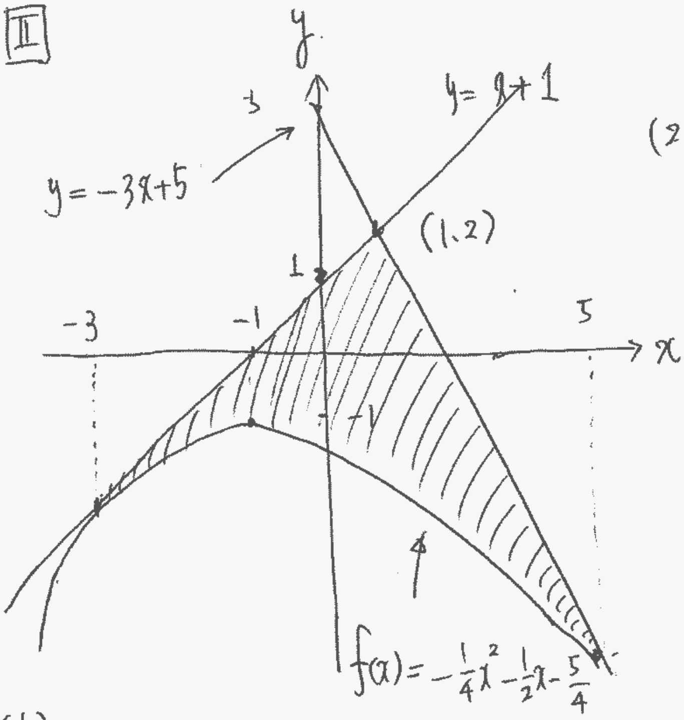
$$c = \frac{p^2-r}{2p+q}$$

$$R = |p-c|$$

$$= \left|p - \frac{p^2-r}{2p+q}\right|$$

$$= \left|\frac{p^2+pq+r}{2p+q}\right|$$

Ⅲ



(1)

$$S=\int_{-3}^{1} x+1-f(x)\,dx$$

$$+\int_{1}^{5} -3x+5-f(x)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}(x+3)^2dx+\int_{1}^{5}\frac{1}{4}(x-5)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}(x+3)^3\right]_{-3}^{1}+\left[\frac{1}{12}(x-5)^3\right]_{1}^{5}$$

$$=\frac{1}{12}4^3+\frac{1}{12}4^3=\frac{4^3}{6}=\underset{\sim\sim}{\frac{32}{3}}$$

(2) 直線 $x=-2$ 上にある格子点

はなし.

直線 $x=-1$ 上にある格子点

はなし

直線 $x=0$ 上にある格子点,

$(0, 0)$ $(0, -1)$ 2コ

直線 $x=1$ 上にある格子点,

$(1, 1)$ $(1, 0)$ $(1, -1)$

の 3コ.

直線 $x=2$ 上にある格子点,

$(2, -2)$, $(2, -3)$ の 2コ

直線 $x=3$ 上にある格子点,

$x=4$ 〃

はなし.

よって, 7コ.

Ⅲ

(1) $\sqrt[3]{p}$ が有理数 $\frac{n}{m}$ であるとする。(m, n 互いに素な整数)

$$\frac{n}{m} = \sqrt[3]{p}$$

$$\Leftrightarrow n^3 = pm^3 \cdots ①$$

n^3 は p の倍数より

n は p の倍数

$n = pk$ (k 整数) とおける

① に代入して

$$p^3k^3 = pm^3 \Leftrightarrow p^2k^3 = m^3$$

m^3 は p の倍数より

m は p の倍数

これは m と n が互いに素であることに反する。$\sqrt[3]{p}$ は無理数 //

(2) $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0 \cdots ①$

両辺 $p^{\frac{1}{3}}$ をかけて

$$ap + bp^{\frac{2}{3}} + cp^{\frac{1}{3}} = 0 \quad // \cdots ②$$

(3) ① 両辺 b 倍

$$abp^{\frac{2}{3}} + b^2p^{\frac{1}{3}} + bc = 0 \quad ㋐$$

② 両辺 a 倍

$$a^2p + abp^{\frac{2}{3}} + acp^{\frac{1}{3}} = 0 \quad ㋑$$

㋐ − ㋑

$$(b^2 - ac)p^{\frac{1}{3}} + bc - a^2p = 0 \quad //$$

(4) $p^{\frac{1}{3}}$ は (1) より無理数

$b^2 - ac \neq 0$ とすると

$$p^{\frac{1}{3}} = -\frac{bc - a^2p}{b^2 - ac}$$

左辺無理数 右辺有理数

となり成立せず。

よって $b^2 - ac = 0 \cdots$ ㋒

このとき $bc - a^2p = 0 \cdots$ ㋓

$a \neq 0$ とすると $c = \frac{b^2}{a}$ (㋒より)

㋓に代入 $b\frac{b^2}{a} - a^2p = 0$

$\Leftrightarrow b^3 = a^3p \cdots$ ㋔

b^3 は p の倍数より

b は p の倍数

$b=pb'$ (b'整数)を㊀に
代入
$p^3b'^3=a^3p$
$\Leftrightarrow p^2b'^3=a^3$ …… ㋕

aはpの倍数より$a=pa'$
とおける.
㋕に代入して
$p^2\cdot b'^3=p^3a'^3$
$\Leftrightarrow b'^3=p^3a'^3$
これは. ㋔ の aをa'
bをb'にしたもので.
この操作を無限回
続けることができる。
すると. aとbはpで無限回
割り切ることができるので.
それは 0だけだから不適

よって. $a=0$.
㋒から $b=0$
①から $c=0$ //

$\boxed{\text{IV}}$

(1) $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

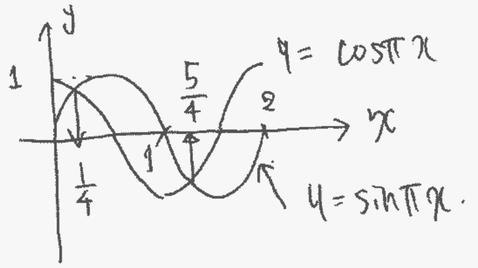
$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x)$

$= \underline{2e^x \cos x}$

(2)(i) $g(x) = e^{-\pi x}\sin \pi x$

$g'(x) = -\pi e^{-\pi x}\sin \pi x + e^{-\pi x}\pi \cos \pi x$

$= \pi e^{-\pi x}(-\sin \pi x + \cos \pi x)$



x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$	2
g'		+	0	−	0	+	—
g		↗		↘		↗	

$g(x)$は $x = \frac{1}{4} + 2k$ (k整数)

で極大値

$g\left(\frac{1}{4} + 2k\right) = e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi}}$

をとる。

$g(x)$は $x = \frac{5}{4} + 2k$

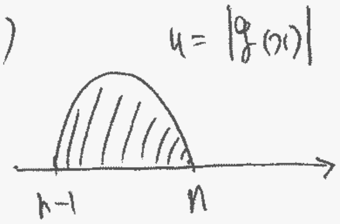
で極小値

$g\left(\frac{5}{4} + 2k\right) = e^{-\frac{5}{4}\pi - 2\pi k}\sin\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)$

$= \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi - 2k\pi}}$

をとる。

(ii)



$V_n = \int_{n-1}^{n} \pi\{g(x)\}^2 dx$

$= \int_{n-1}^{n} \pi \cdot e^{-2\pi x}\sin^2 \pi x \, dx$

$= \frac{\pi}{2}\int_{n-1}^{n} e^{-2\pi x}(1 - \cos 2\pi x)dx$

$-2\pi x = t$とおくと

x	$n-1 \to n$
t	$-2\pi(n-1) \to -2\pi n$

$x = \frac{-1}{2\pi}t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{2\pi}$

$$V_n = \frac{\pi}{2}\int_{-2\pi(n-1)}^{-2\pi n} e^t(1-\cos t)\frac{-1}{2\pi}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2\pi(n-1)}^{-2\pi n} e^t(\cos t - 1)\,dt$$

(1)より $\int e^t \cos t\,dt = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C$

を用いて.

$$V_n = \frac{1}{4}\left[\frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) - e^t\right]_{-2\pi(n-1)}^{-2\pi n}$$

$$= \frac{1}{8}e^{-2\pi n} - \frac{1}{4}e^{-2\pi n} - \frac{1}{8}e^{-2\pi(n-1)} + \frac{1}{4}e^{-2\pi(n-1)}$$

$$= \frac{1}{8}e^{-2\pi n}\left(1 - 2 - e^{2\pi} + 2e^{2\pi}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{8}e^{-2\pi n}\left(e^{2\pi} - 1\right)}$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$　　公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数

$$= \frac{1}{8}\left(e^{2\pi} - 1\right)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n}$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{2\pi} - 1\right)\frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

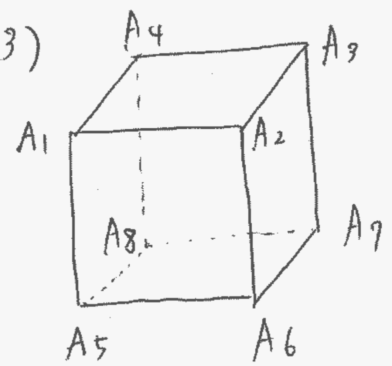
$$= \frac{1}{8}\left(e^{2\pi} - 1\right)\frac{1}{e^{2\pi} - 1} = \underline{\frac{1}{8}}$$

$\boxed{\mathrm{V}}$

(1) 正八面体

(2) 点

(3)



A_1〜A_8 の8コを4コずつの2組 X、Yに分ける場合の数は

$_8C_4 = 70$ 通り

(ア) (A_1, A_2, A_3, A_4) (A_5, A_6, A_7, A_8)

のようにXとYを選ぶと

Zは存在しない……6通り

(イ) (A_1, A_4, A_2, A_5) (A_3, A_7, A_6, A_8)

のようにXとYを選ぶと

Zは存在しない……8通り

$p = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$

(ウ) (A_1, A_2, A_3, A_7) (A_4, A_5, A_6, A_8)

のようにX・Yを選ぶと

Zは1点になる。

これはXを決めるとき8コの頂点から1コ選び(この場合はA_2)その頂点が立方体の側面における正方形の1つの頂点になっている正方形は3コある。(この場合 $A_1A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_2A_6A_5A_1$)

1コ選べば A_2A_7 のような辺が決まりXも決まる。

よって $8 \times 3 = 24$ 通り

$q_0 = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$

(エ) $(A_1A_2A_7A_8)$ $(A_3A_4A_5A_6)$

のようにX、Yを選ぶと

Zは線分になる……6通り

$q_1 = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$ No8

(オ) Zが平面図形になることはない.

$q_2 = 0$

(カ) Zが立体図形になる

αは, $70-(14+24+6)=26$

通り

$q_3 = \dfrac{26}{70} = \dfrac{13}{35}$