早稲田大学 社会科学部 数学 解答例

1

(1) $b \geqq \frac{a^2}{6}$ をみたすのは

(i) $a=1$のとき bは$1 \sim 6$の6通り

(ii) $a=2$のとき bは 〃

(iii) $a=3$のとき bは$2-6$の5通り

(iv) $a=4$のとき bは$3-6$の4通り

(v) $a=5$のとき bは$5-6$の2通り

(vi) $a=6$のとき bは6のみ 1通り

計24通り。この中で

$a=3$は5通り $\frac{5}{24}$

(2) $\sin\frac{b}{4}\pi = \cos\frac{a}{4}\pi$ となるaは

(i) $b=1$のとき $a=1$

(ii) $b=2$のとき 不適

(iii) $b=3$のとき $a=1$

(iv) $b=4$のとき $a=2, 6$

(v) $b=5$のとき $a=3, 5$

(vi) $b=6$のとき $a=4$

計7通り

求める確率は $1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$

(3) $b^2-7b-ab-2a^2+11a+6$

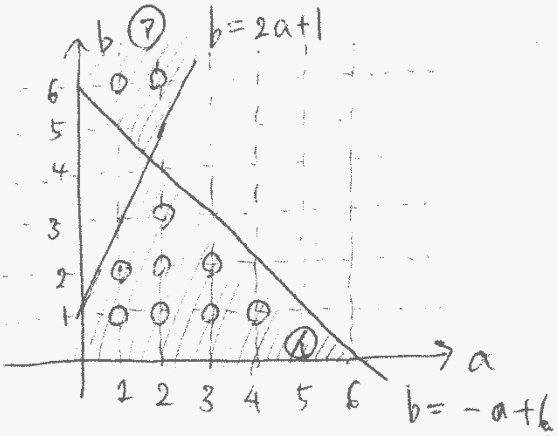
$= b^2-(7+a)b-2a^2+11a+6$

$= b^2-(7+a)b-(2a+1)(a-6)$

$= (b-2a-1)(b+a-6)$

これが正より

$$\begin{cases} b-2a-1>0 \text{ かつ } b+a-6>0 & ㋐ \\ \text{or} & \\ b-2a-1<0 \text{ かつ } b+a-6<0 & ㋑ \end{cases}$$



$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

2.

(1) 3^1 の1の位 …… 3

3^2 〃 …… 9

3^3 〃 …… 7

3^4 〃 …… 1

3^5 〃 …… 3

3^6 〃 …… 9

⋮

3, 9, 7, 1 のくり返し

3^{20} の1の位 …… 1

(2) $10^{20} \leqq 3^n < 10^{21}$

$\Leftrightarrow 20\log_{10}10 \leqq n\log_{10}3 < 21\log_{10}10$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{20}{0.4771}}_{\shortparallel} \leqq n < \underbrace{\frac{21}{0.4771}}_{\shortparallel}$

$41.91\cdots \qquad 44.01\cdots$

(1)より、4で割った余りが3であり、$42 \leqq n \leqq 44$ をみたす

n は 43 のみ。

(3) $\log_{10}7^{70} = 70 \times 0.8451$

$= 59.157$

7^{70} は60ケタで最高位の数を a とおく。

$a\times 10^{59} \leqq 7^{70} < (a+1)10^{60}$

$a \leqq 10^{0.157} < a+1$

$\log_{10}a \leqq 0.157 < \log_{10}(a+1)$

これをみたす自然数 a は 1

(4) $7^{70} = 10^{59.157}$

$10^{59.157} - 10^{59} = 10^{59}(10^{0.157}-1)$

の最高の位の数を求める。

x とおくと、

$x \times 10^{58} \leqq 10^{59}(10^{0.157}-1) < (x+1)10^{58}$

$x \leqq 10(10^{0.157}-1) < x+1$

$\log_{10}\left(1+\frac{x}{10}\right) \leqq 0.157 < \log_{10}\left(\frac{11+x}{10}\right)$

$x=4$ のとき成立する。

$\underbrace{\log_{10}\frac{14}{10}}_{\shortparallel} \leqq 0.157 < \underbrace{\log_{10}\frac{15}{10}}_{\shortparallel}$

$0.1461 \qquad 0.1761$

4

3 (1) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}(z-\sqrt{2})^2 \\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 0\leqq z\leqq \sqrt{2} \end{cases}$

$x=t$ のとき $(t\geqq 0)$

$t^2+y^2=\frac{1}{2}(z-\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}(z-\sqrt{2})^2-t^2$

$y^2\geqq 0$ より

$\frac{1}{2}(z-\sqrt{2})^2-t^2\geqq 0$

$\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})^2\geqq 2t^2$

$\Leftrightarrow z-\sqrt{2}\leqq -\sqrt{2}t,\ \sqrt{2}t\leqq z-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \underset{㋐}{z\leqq \sqrt{2}-\sqrt{2}t},\ \underset{㋑}{\sqrt{2}t+\sqrt{2}\leqq z}$

$z-\sqrt{2}\leqq 0$ より ㋑は不適

$\underline{0\leqq z\leqq \sqrt{2}-\sqrt{2}t}$

(2) $(t,0,0)$ と (t,y,z) の距離の2乗

$(O_tP_t)^2=y^2+z^2$

$=\frac{1}{2}(z-\sqrt{2})^2-t^2+z^2$

$=\frac{1}{2}z^2-\sqrt{2}z+1-t^2+z^2$

$=\underline{\frac{3}{2}z^2-\sqrt{2}z+1-t^2}$

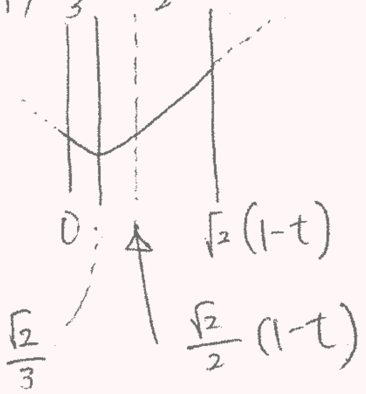
(3) $(O_tP_t)^2$

$=\frac{3}{2}\left(z^2-\frac{2}{3}\sqrt{2}z\right)+1-t^2$

$=\frac{3}{2}\left\{\left(z-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{2}{9}\right\}+1-t^2$

$=\frac{3}{2}\left(z-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{2}{3}-t^2$

(i) $\frac{\sqrt{2}}{3}\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)\Leftrightarrow 0\leqq t\leqq\frac{1}{3}$ のとき

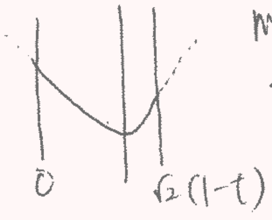


max $z=\sqrt{2}(1-t)$ のとき

$(O_tP_t)^2=\frac{1}{2}(-\sqrt{2}t)^2-t^2+2(1-t)^2$

$=\underline{2(1-t)^2}$

(ii) $\frac{1}{3}\leqq t$ のとき



max

$z=0$ のとき

$\underline{1-t^2}$